الوجيز في معايير الرياضيات

دليل المراجعة للرخصة المهنية لمعلمي الرياضيات

إعداد

فيصل بن عبد الله بن مطلق العمرو

ماجستير التربية في المناهج وطرق تدريس الرياضيات

جامعة القصيم

mathpath1.vercel.app

faisalalamr4676@gmail.com

المحتويات

فكرة الكتاب	٢
المعيار الأول: معرفة الأعداد والعمليات عليها	٣
المعيار الثاني: الإلمام بمبادئ الجبر والدوال الحقيقية	٢٣
المعيار الثالث: الهندسة	٥١
المعيار الرابع: القياس	٧٧
المعيار الخامس: الإحصاء والاحتمالات	٨٩
المعيار السادس: المنطق والاستدلال	١٠٢
المعيار السابع: التفاضل والتكامل وتطبيقاتهما	١١٠
المعيار الثامن: استراتيجيات التعليم والتعلّم	١٣٤
المعيار التاسع: حل المسألة واستراتيجياتها	١٤٣
المعيار العاشر: التواصل الرياضي	١٤٩
المعيار الحادي عشر: النمذجة والترابط	١٥٣
المعيار الثاني عشر: الاستدلال والبرهان	١٥٦
خاتمة الكتاب	١٦١

فكرة الكتاب

الوجيز مرجع مراجعة مختصر لاختبار الرخصة المهنية لمعلمي الرياضيات، يغطي المعايير الاثني عشر. يُقسَّم كل معيار إلى موضوعات، ويُفتتح كل موضوع بما يلزم معرفته قبل مواجهة سؤاله: تعريف المصطلح، أو نص القانون، أو الخاصية، أو الصيغة التي يقوم عليها، ثم يأتي بعدها مثال يطبّق هذه الفكرة، مع طريقة تعامل مختصرة، وخطوات حل موجزة، والإجابة الصحيحة.

لا يسعى الكتاب لاستيعاب كل سؤال ممكن، بل يختار لكل موضوع مثالًا واحدًا يمثّله، أو أكثر إن كان الموضوع أوسع من أن يفي به مثال واحد. الهدف أن تُغطَّى الأفكار المهمة في كل معيار تغطية كافية دون أن يتضخم الكتاب بتكرار أسئلة تقيس الفكرة نفسها.

اقرأ تمهيد الموضوع أولًا، فهو ما تحتاجه لحل سؤاله، ثم تأمل السؤال وطريقته وحله. التنبيهات داخل النص تبرز مواضع الالتباس والفخاخ الشائعة في الاختبار.

المعيار الأول: معرفة الأعداد والعمليات عليها

مجموعات الأعداد وترتيبها

- نصنّف العدد بعد تبسيطه. الكلية W هي الصفر وأعداد العد، والطبيعية $\mathbb{N}$ تبدأ هنا بالواحد، والصحيحة $\mathbb{Z}$ تضم السالبة والصفر والموجبة. النسبي $\mathbb{Q}$ يُكتب كسرًا بسطه ومقامه صحيحان والمقام غير صفر؛ وغير النسبي لا يقبل ذلك. الحقيقية $\mathbb{R}$ تجمعهما، والمركبة $\mathbb{C}$ تشمل الحقيقية والتخيلية. الصفر نسبي وزوجي؛ فقسمته على اثنين لا تترك باقيًا، وهو ليس موجبًا ولا سالبًا.
- **مثال:** العدد $\frac{2}{3}$ ينتمي إلى مجموعة الأعداد
- أ) الطبيعية
- ب) الكلية
- ج) الصحيحة
- د) النسبية
- **طريقة التعامل:** افحص هل يمكن كتابة العدد نسبةً بين صحيحين، ثم انتبه إلى أن العدد قد ينتمي إلى أكثر من مجموعة متداخلة.
- **الإجابة:** (د) النسبية
- **خطوات الحل:**

1. $\frac{2}{3}$ ليس صحيحًا لكنه نسبة بين صحيحين، فهو نسبي.

خاصية الانغلاق

- الانغلاق يعني أن نتيجة العملية على أي عنصرين تبقى في المجموعة نفسها دائمًا. الصحيحة مغلقة تحت الجمع والطرح والضرب، ولا تنغلق تحت القسمة عمومًا. يكفي مثال مضاد واحد لنفي الانغلاق؛ أما مثال ناجح واحد فلا يثبته.
- **مثال:** مجموعة أعداد ناتج جمع عددين منها ينتمي لنفس المجموعة هي
- أ) الفردية
- ب) الأولية
- ج) الزوجية
- د) المؤلفة
- **طريقة التعامل:** افحص كل مجموعة في الخيارات: هل جمع أي عنصرين منها يحافظ على نوع العدد، أم تستطيع إيجاد مثال مضاد؟
- **الإجابة:** (ج) الزوجية
- **خطوات الحل:**

1. مجموع أي عددين زوجيين دائمًا زوجي؛ أما الفردية والأولية فليست مغلقة تحت الجمع.

ترتيب العمليات

- عند اجتماع العمليات نبدأ بالأقواس ثم الأسس والجذور، ثم الضرب والقسمة معًا من اليسار، ثم الجمع والطرح معًا من اليسار. الأس في -3^2 يخص الثلاثة، وفي $(-3)^2$ يشمل العدد السالب كله.

- **مثال:** ما ناتج

$$10 + 6 \div 2 \times 3$$

- **طريقة التعامل:** نفذ القسمة والضرب بحسب ترتيبهما المكتوب، ثم أضف العدد المتبقي؛ لا تقدّم الجمع ولا الضرب على القسمة تلقائيًا.
- **الإجابة:** (أ) 19
- **خطوات الحل:**

1. القسمة أولًا: $6 \div 2 = 3$، ثم الضرب: $3 \times 3 = 9$، فالناتج $10 + 9 = 19$

قابلية القسمة

- قابلية القسمة تعني أن القسمة لا تترك باقيًا. للاثنين ننظر إلى الآحاد، وللثلاثة والتسعة إلى مجموع الأرقام، وللأربعة إلى آخر خانتين، وللثمانية إلى آخر ثلاث خانات. للخمسة الآحاد صفر أو خمسة، وللستة يجتمع شرطا الاثنين والثلاثة، ولأحد عشر نفحص فرق مجموعَي الخانات المتناوبة.
- **مثال:** أي الأعداد الآتية يقبل القسمة على 6؟
- أ) 9999
- ب) 9998
- ج) 9997
- د) 9996
- **طريقة التعامل:** افحص زوجية كل خيار وقابلية مجموع أرقامه للقسمة على ثلاثة؛ يجب تحقق الشرطين معًا.
- **الإجابة:** (د) 9996

- **خطوات الحل:**

1. الخيار الزوجي الذي مجموع أرقامه يقبل القسمة على 3 هو (د)، فيقبل القسمة على 6

الأعداد الأولية والتحليل

- الأولي عدد صحيح أكبر من واحد له قاسمان موجبان فقط؛ والمؤلف له أكثر من قاسمين، والواحد ليس أوليًا ولا مؤلفًا. نحلل العدد إلى عوامل أولية لمعرفة قواسمه. عدد القواسم الموجبة يساوي حاصل ضرب أسس العوامل الأولية بعد زيادة كل أس واحدًا. وفي أزواج القواسم يكون الزوج الأقرب عادةً صاحب أصغر فرق.
- **مثال:** إذا كان a, b عددين صحيحين موجبين بحيث $ab = 105$ و $a < b$، فإن أصغر قيمة للفرق $b - a$ هي
- **طريقة التعامل:** اكتب أزواج العوامل الصحيحة الموجبة لحاصل الضرب المعطى، ثم قارن الفرق بين عنصرَي كل زوج مع مراعاة ترتيب الصغير والكبير.
- **الإجابة:** (ب) 8
- **خطوات الحل:**

1. أزواج قواسم 105: 7×15، 5×21، 3×35، وأصغر فرق عند $a = 7, b = 15$: $b - a = 8$

القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر

- القاسم المشترك الأكبر هو أكبر عدد يقسم العددين، والمضاعف المشترك الأصغر هو أصغر مضاعف موجب مشترك بينهما. في التحليل الأولي نأخذ أصغر الأسس المشتركة للأول، وأكبر الأسس لجميع العوامل للثاني. حاصل ضرب القاسم المشترك الأكبر في المضاعف المشترك الأصغر يساوي حاصل ضرب العددين الموجبين.

$$\gcd(a,b) \times \operatorname{lcm}(a,b) = a \times b$$

- **مثال:** حاصل ضرب القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للعددين 10, 25 هو
- **طريقة التعامل:** المطلوب حاصل ضرب القاسم والمضاعف؛ استخدم العلاقة مباشرة بدل حساب كل منهما منفردًا.
- **الإجابة:** (د) 250
- **خطوات الحل:**

1. $\text{GCD}(10,25) \times \text{LCM}(10,25) = 10 \times 25 = 250$

التطابقات (القياس)

- التطابق يصف تساوي باقي القسمة على عدد موجب يسمى القياس. الرمز $\equiv$ يعني «متطابق»، وmod يحدد القياس. عند حل تطابق نبحث عن قيمة تحقق الباقي المطلوب؛ ولا نقسم على معامل إلا إذا كان له معكوس بالنسبة إلى القياس.
- **مثال:** إذا كان $3x \equiv 7 \pmod{11}$، فما قيمة x؟
- **طريقة التعامل:** جرّب بواقي القيم الصحيحة أو ابحث عن المعكوس للمعامل، ثم تحقق من باقي قسمة الطرفين على القياس المذكور.
- **الإجابة:** (ج) 6
- **خطوات الحل:**

1. $3x-7$ تقسم 11؛ بأصغر مضاعف: $3x - 7 = 11 \Rightarrow x = 6$

خانة الآحاد في القوى

- لمعرفة آحاد قوة كبيرة نتابع آحاد القوى الأولى حتى تتكرر الدورة، ثم نحدد موقع الأس داخلها. آحاد القوى الموجبة للأعداد المنتهية بصفر أو واحد أو خمسة أو ستة ثابتة؛ أما باقي الآحاد فلها دورات قصيرة.
- **مثال:** آحاد العدد 4^{23} هو
- **طريقة التعامل:** اكتب آحاد القوى الأولى للقاعدة، ثم استعمل باقي قسمة الأس على طول الدورة؛ والباقي صفر يشير إلى آخر عنصر فيها.
- **الإجابة:** (ب) 4
- **خطوات الحل:**

1. الأس فردي فآحاد 4^{23} يطابق آحاد $4^1 = 4$

الأسس والجذور

- عند ضرب قوتين للأساس نفسه نجمع الأسس، وعند قسمتهما نطرح الأسس، وعند رفع قوة إلى قوة نضرب الأسس. الأس السالب يعني المقلوب، والأس الصفري لأساس غير صفري يعطي واحدًا. الجذر يُكتب قوة كسرية: البسط يمثل القوة والمقام دليل الجذر.
- **مثال:** أوجد قيمة

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{4^{15}}}}$$

- **طريقة التعامل:** حوّل الجذور المتداخلة إلى أسس كسرية، ثم اضرب الأسس لتوحيد الصورة قبل التبسيط.
- **الإجابة:** (أ) 2
- **خطوات الحل:**

1. $4^{15} = 2^{30}$، وبتحويل الجذور لأسس: $2^{30\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}} = 2^1 = 2$

عمليات الجذور

- نجمع ونطرح الجذور المتشابهة بعد تبسيطها، وذلك بجمع أو طرح المعاملات مع إبقاء الجذر. نخرج العامل المربع الكامل من الجذر التربيعي. لضرب الجذور وقسمتها نراعي شروط الأعداد الحقيقية، وإذا احتاج المقام إلى إنطاق نستخدم المرافق. وفي المعادلة الجذرية نعزل الجذر ونربع مع التحقق في الأصل.
- **مثال:** أوجد قيمة

$$\sqrt{27} + 2\sqrt{3}$$

- **طريقة التعامل:** بسّط الجذر الذي يحتوي مربعًا كاملًا، ثم اجمع معاملات الجذور التي أصبحت متشابهة؛ لا تجمع الأعداد تحت الجذر.
- **الإجابة:** (أ) $5\sqrt{3}$
- **خطوات الحل:**

1. $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$، فالمجموع $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

الصيغة العلمية

- الصيغة العلمية تكتب العدد معاملًا بين واحد وعشرة مضروبًا في قوة للعدد عشرة. في ضرب المقادير نقسم العمل إلى المعاملات والأسس؛ وفي القسمة نقسم المعاملين ونطرح الأسين، ثم نضبط المعامل إلى صورته العلمية.

- **مثال:** أوجد قيمة المقدار

$$\frac{2.4 \times 10^2}{3.2 \times 10^{-1}}$$

- **طريقة التعامل:** اقسم المعاملين العشريين، واطرح أس المقام من أس البسط، ثم راجع موضع الفاصلة والصورة العلمية.
- **الإجابة:** (ج) 750
- **خطوات الحل:**

1. اقسم المعاملات $\frac{2.4}{3.2} = \frac{3}{4}$، واطرح الأسس $10^{2-(-1)} = 10^3$، فالناتج 750

الكسور العشرية الدورية

- العشري الدوري تتكرر فيه خانة أو كتلة خانات. لتحويله إلى كسر نضرب بقوة مناسبة للعشرة لإزاحة الدورة، ثم نطرح لإزالتها ونحل للعدد. إذا سبقت الدورة خانات غير دورية نزيحها أولًا. وفي الدوري الخالص يكون المقام مؤلفًا من تسعات بعدد خانات الدورة.
- **مثال:** قيمة المقدار $1.\overline{33}$ تساوي
- **طريقة التعامل:** افصل الجزء الصحيح عن الجزء الدوري، وحدد عدد خانات الدورة، ثم استخدم الضرب والطرح لإزالة التكرار دون تقريب عشري.
- **الإجابة:** (ب) $\frac{4}{3}$
- **خطوات الحل:**

1. $1.\overline{33} = \frac{133 - 1}{99} = \frac{132}{99} = \frac{4}{3}$

مقارنة الكسور وترتيبها

- للمقارنة بين الكسور نوحد المقامات إلى مقام موجب أو نقارن بالضرب التبادلي. مع تساوي المقامات نقارن البسوط، ومع تساوي البسوط الموجبة يكون صاحب المقام الأصغر أكبر. لا تعكس ترتيب الكسور السالبة اعتمادًا على مقاماتها وحدها.
- **مثال:** عند ترتيب الكسور $\frac{3}{7}$ ، $\frac{7}{10}$ ، $\frac{2}{5}$ ، $\frac{5}{9}$ تصاعدياً فإن الكسر الأول هو
- **طريقة التعامل:** استخدم مقامًا مشتركًا أو قيمة مرجعية، ورتب الكسور تصاعديًا قبل اختيار الأول.
- **الإجابة:** (ج) $\frac{2}{5}$
- **خطوات الحل:**

1. أصغر مرشحَين $\frac{3}{7}, \frac{2}{5}$؛ بالضرب التبادلي $2 \times 7 = 14 < 3 \times 5 = 15$، فالأصغر $\frac{2}{5}$

الزوجية والفردية وخواص الإشارة

- مجموع عددين من الزوجية نفسها زوجي، ومجموع مختلفَي الزوجية فردي. حاصل ضرب عدد زوجي في صحيح زوجي، وحاصل ضرب فرديين فردي. في الإشارة، ضرب متشابهَي الإشارة موجب ومختلفَيهما سالب؛ ورفع غير الصفر إلى أس زوجي يزيل الإشارة السالبة.
- **مثال:** إذا كان n عدداً فردياً، فأي مما يأتي يمثل عدداً زوجياً؟
- أ) $2n + 3$
- ب) n^2
- ج) $3n + 1$
- د) $2n - 1$

- **طريقة التعامل:** استعمل كون المتغير فرديًا لتحديد زوجية كل عبارة، أو جرّب قيمة فردية بسيطة للتحقق دون الاكتفاء بها برهانًا.
- **الإجابة:** (ج) $3n+1$
- **خطوات الحل:**

1. بفرض $n=1$: الخيار $3n+1=4$ عدد زوجي.

الكسور المركّبة وتبسيط العبارات

- في الكسر المركب نبسّط البسط والمقام كلًا على حدة، ثم نحول القسمة إلى ضرب في مقلوب المقسوم عليه غير الصفري. في جمع الكسور نوحد المقامات؛ وفي الضرب يجوز اختصار العوامل، ولا يجوز اختصار حدود داخل جمع أو طرح.
- **مثال:** أوجد قيمة

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}$$

- **طريقة التعامل:** اجمع كسري البسط بمقام مشترك، ثم اقسم الناتج على الكسر الموجود في المقام بالضرب في مقلوبه.
- **الإجابة:** (د) $\frac{15}{8}$
- **خطوات الحل:**

1. اجمع البسط $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$، واقسم على $\frac{2}{3}$: $\frac{5}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{8}$

الكسور والأعداد العشرية في الحساب

- في ضرب العشريات نضرب كأنها أعداد صحيحة، ثم نعيد الفاصلة بحسب مجموع المنازل العشرية. في القسمة يمكن تحريك الفاصلتين بالمقدار نفسه لجعل المقسوم عليه صحيحًا. التقدير السريع يكشف خطأ الفاصلة أو عدد الأصفار.
- **مثال:**

$$0.018 \times 2 = \cdots$$

- **طريقة التعامل:** اضرب المقدار مع إبقاء منازله العشرية، ثم تحقق من معقولية حجمه مقارنة بالعدد الأصلي.
- **الإجابة:** (ج) $\frac{9}{250}$
- **خطوات الحل:**

1. $0.018 \times 2 = 0.036 = \frac{9}{250}$

النسبة والتناسب

- النسبة تقارن مقدارين، والتناسب يساوي بين نسبتين. لتوزيع كمية بنسبة محددة نجمع أجزاء النسبة ثم نوجد قيمة الجزء الواحد. والنسبة المئوية تعني جزءًا من مئة؛ في النسب المتتابعة انتبه إلى الكمية التي تُحسب منها النسبة الثانية.
- **مثال:** إذا كانت نسبة قبول الطلاب إلى الطالبات في إحدى الجامعات هي $2 : 3$، وكان عدد الطالبات 4500، فكم عدد الطلاب المقبولين؟
- **طريقة التعامل:** عدد الطالبات يقابل الجزء المخصص لهن؛ استخرج قيمة جزء النسبة، ثم طبقها على عدد أجزاء الطلاب.
- **الإجابة:** (أ) 3000

- **خطوات الحل:**

1. كوّن التناسب $\frac{2}{3} = \frac{x}{4500}$، فـ $x = 3000$

القيمة المطلقة

- القيمة المطلقة هي المسافة إلى الصفر، ولذلك لا تكون سالبة. إذا كان المقدار غير سالب تبقى صورته، وإذا كان سالبًا نعكس إشارته. والجذر التربيعي لمربع عدد يساوي قيمته المطلقة، لا العدد نفسه دائمًا.

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

- **مثال:** إذا كان $x + y = A$ و x عدد موجب، فإن $|A - y| + |y - A|$ يساوي
- **طريقة التعامل:** استبدل العلاقة المعطاة داخل المقدارين، وحدد إشارة كل منهما قبل إزالة رمز القيمة المطلقة.
- **الإجابة:** (ج) $2x$
- **خطوات الحل:**

1. بما أن $y = A - x$: $|A - y| + |y - A| = |x| + |-x| = 2x$ (لأن x موجب).

الأعداد المركّبة

- نكتب المركب على صورة $a + bi$، حيث $i^2 = -1$. نجمع الأجزاء الحقيقية والتخيلية منفصلة، ونضرب بالتوزيع. في القسمة نضرب البسط والمقام في مرافق المقام؛ والمرافق يغير إشارة الجزء التخيلي فقط. مقياس المركب هو الجذر التربيعي لمجموع مربعَي جزأيه.
- لتبسيط جذر عدد سالب نكتبه $\sqrt{-n} = \sqrt{n} \cdot i$ حيث $n > 0$؛ فإن كان n غير مربّع كامل يبقى تحت الجذر مضروبًا في i

- عددان مركّبان متساويان إذا وفقط إذا تساوى جزآهما الحقيقيان معًا وجزآهما التخيليان معًا، هذا يحوّل معادلة مركّبة واحدة إلى معادلتين حقيقيتين.
- **مثال:** ما قيمة

$$\frac{10}{2+i}$$

- **طريقة التعامل:** استخدم مرافق المقام لإزالة الجزء التخيلي منه، ثم وزع البسط واستبدل مربع الوحدة التخيلية بسالب واحد.
- **الإجابة:** (ب) $4-2i$
- **خطوات الحل:**

1. اضرب في مرافق المقام: $\dfrac{10(2-i)}{4+1} = 2(2-i) = 4-2i$

الصورة القطبية والإحداثيات القطبية

- الصورة القطبية تحدد المركب بمقياسه وزاويته. في الضرب نضرب المقياسين ونجمع الزاويتين، وفي القوة الصحيحة نرفع المقياس للقوة ونضرب الزاوية في الأس. للتحويل إلى الصورة الجبرية نستخدم جيب التمام للجزء الحقيقي والجيب للجزء التخيلي.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

- **مثال:** إذا كان العدد المركب $z_1 = (3, 20^\circ)$ و $z_2 = (4, 40^\circ)$، **فأوجد**

$$z_1 z_2$$

- **طريقة التعامل:** اضرب المقياسين واجمع الزاويتين، ثم استخدم النسب المثلثية للزاوية الناتجة إذا طُلبت الصورة الجبرية.
- **الإجابة:** (أ) $6 + 6\sqrt{3}\,i$
- **خطوات الحل:**

1. بقاعدة الضرب القطبي: $\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] = 12[\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ] = 6 + 6\sqrt{3}\,i$

الربح والخسارة والخصم

- الربح أو الخصم المئوي يحسب من القيمة التي يطبق عليها في تلك المرحلة. للزيادة نضرب في واحد زائد النسبة بصورتها العشرية، وللنقص نضرب في واحد ناقصها. زيادة ونقص بالنسبة نفسها لا يتعادلان إذا تغيرت قاعدة الحساب.
- **مثال:** اشترى محمد أسهماً بـ 400 ريال، وربح في الأسبوع الأول 20%، ثم خسر في الأسبوع الثاني 20%. كم أصبح معه؟
- **طريقة التعامل:** احسب أثر الزيادة على رأس المال أولًا، ثم طبق الخسارة على القيمة الجديدة، لا على رأس المال الأصلي.
- **الإجابة:** (ج) 384
- **خطوات الحل:**

1. بعد الربح 20%: $400 \to 480$، وبعد الخسارة 20% من الجديد: $480 - 96 = 384$

السرعة النسبية والتناسب المركّب

- المسافة تساوي السرعة مضروبة في الزمن. في اللحاق وبالاتجاه نفسه نستخدم فرق السرعتين، وفي التقابل نستخدم مجموعهما. متوسط سرعة رحلة يساوي المسافة الكلية على الزمن الكلي؛ وليس متوسط السرعتين دائمًا. وفي العمل المشترك نجمع معدلات الإنجاز، لا أزمنة العمل.
- **مثال:** سيارة تسير بسرعة 53 متر/دقيقة وأخرى بسرعة 75 متر/دقيقة، فإذا انطلقتا معاً وفي نفس الاتجاه فكم تكون المسافة بينهما بعد 15 دقيقة؟
- **طريقة التعامل:** الاتجاه واحد والانطلاق متزامن؛ استخدم فرق السرعتين لتحديد معدل زيادة المسافة بين السيارتين، ثم اربطه بالمدة المعطاة.
- **الإجابة:** (د) 330

- **خطوات الحل:**

1. السرعة النسبية $75 - 53 = 22$، والمسافة بعد 15 دقيقة: $22 \times 15 = 330$

المجموعات والعدّ

- التقاطع يضم العناصر المشتركة، والاتحاد جميع العناصر دون تكرار، والفرق ما ينتمي إلى الأولى دون الثانية. نرمز للانتماء بـ$\in$. عدد المجموعات الجزئية لمجموعة منتهية يساوي اثنين مرفوعة إلى عدد عناصرها، وتشمل المجموعة الخالية والمجموعة الأصلية.
- **مثال:** إذا كانت A مجموعة عناصر مضاعفات العدد 3، و B مجموعة قواسم العدد 81، فكم عدد عناصر

$$A \cap B$$

- **طريقة التعامل:** اكتب القواسم المحدودة للعدد، ثم أبقِ فقط القواسم التي تحقق شرط المضاعفات، وعدّ العناصر المشتركة دون تكرار.
- **الإجابة:** (ب) 4
- **خطوات الحل:**

1. مضاعفات 3 و قواسم $81 = \{1, 3, 9, 27, 81\}$؛ التقاطع $\{3, 9, 27, 81\}$، عدده 4

الأنماط والمتتابعات في أسئلة الأعداد

- في النمط نبحث عن فرق ثابت أو نسبة ثابتة أو دورة أو قاعدة متكررة. الجمع المتناوب يمكن تنظيمه في أزواج، وقد يبقى حد منفرد. مجموع أعداد فردية أو صحيحة متتالية يمكن تبسيطه بالوسط أو بالأزواج بدل جمع كل حد.

- **مثال:** أوجد قيمة المقدار

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - 62 + 63$$

- **طريقة التعامل:** اجمع كل موجب مع السالب الذي يليه، ثم انتبه إلى الحد الأخير الذي لم يدخل في زوج.
- **الإجابة:** (أ) 32
- **خطوات الحل:**

1. كل زوجين متتاليين ناتجهما -1؛ من 1 إلى 62 يوجد 31 زوجًا: -31، زائد الحد الأخير 63: الناتج 32

تحويل الوحدات والقراءة من الرسوم

- قبل التناسب نوحد وحدات المسافة والزمن. التحويل بين الوحدات يعتمد على عامل التحويل؛ وفي المساحة يُربّع العامل وفي الحجم يُكعّب. قراءة رسم تتطلب تحديد المحور ووحدته ومقياسه قبل مقارنة القيم.
- **مثال:** متسابق يقطع 200 m كل 18 ثانية، فكم يستغرق بالدقائق ليقطع

$$4\ \text{km}$$

- **طريقة التعامل:** حوّل المسافة الطويلة إلى وحدة المسافة القصيرة، واستعمل تناسب المسافة مع الزمن عند ثبات السرعة، ثم حوّل الزمن إلى الوحدة المطلوبة.
- **الإجابة:** (ج) 6
- **خطوات الحل:**

1. حوّل $4\,\text{km} = 4000\,\text{m}$، وبالتناسب $x = \dfrac{18 \times 4000}{200} = 360$ ثانية، أي 6 دقائق.

قوى العدد التخيلي ونظرية ديموافر

- الوحدة التخيلية دورية بدورة طولها أربعة: $i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1$، فأي قوة لها تُختصر بباقي قسمة الأس على أربعة. ولإيجاد قوة أو جذر لعدد مركّب في صورته القطبية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، نستعمل نظرية ديموافر: نرفع المقياس للأس ونضرب الزاوية في الأس نفسه.

$$z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

- **مثال:** أوجد قيمة i^{566}
- أ) 1
- ب) -1
- ج) i
- د) $-i$
- **طريقة التعامل:** اكتب الأس على صورة مضاعف لاثنين لتستعمل $i^2 = -1$ مباشرة، أو خذ باقي قسمته على أربعة.
- **الإجابة:** (ب) -1
- **خطوات الحل:**

1. نكتب $i^{566} = (i^2)^{283} = (-1)^{283} = -1$ لأن 283 فردي.

- **مثال:** أوجد قيمة $\left(\sqrt{3} + i\right)^{-4}$
- أ) $\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$
- ب) $\dfrac{1}{16}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$
- ج) $\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

- د) $\frac{1}{16}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

- **طريقة التعامل:** حوّل العدد إلى صورته القطبية أولًا بإيجاد مقياسه وزاويته، ثم طبّق نظرية ديموافر للأس السالب.

- **الإجابة:** (د) $\frac{1}{16}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

- **خطوات الحل:**

1. المقياس $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$، والزاوية $2\theta = \frac{\pi}{6}$. بنظرية ديموافر: $2^{-4}\left[\cos(-4 \times \frac{\pi}{6}) + i\sin(-4 \times \frac{\pi}{6})\right] = \frac{1}{16}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

تمييز الأعداد غير النسبية

- العدد غير النسبي لا يُكتب على صورة نسبة بين صحيحين مهما بسّطناه، بخلاف النسبي الذي قد يظهر بصورة جذر أو كسر معقّد لكنه يختصر إلى عدد صحيح أو كسر اعتيادي. قبل الحكم على عدد، بسّطه أولًا؛ فقد يختفي الجذر بعد التبسيط.

- **مثال:** كل الأعداد الآتية غير نسبية ما عدا

- أ) $\sqrt{11}$

- ب) $\frac{\pi}{2}$

- ج) $-3\sqrt{2} + \sqrt{18}$

- د) $2\sqrt{2}$

- **طريقة التعامل:** بسّط كل عبارة أولًا، فبعضها يختصر إلى عدد نسبي رغم ظهوره بصورة جذر.

- **الإجابة:** (ج) $-3\sqrt{2} + \sqrt{18}$

- **خطوات الحل:**

1. نبسّط $-3\sqrt{2}+\sqrt{18}=-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}=0$، وهو عدد نسبي بخلاف بقية الخيارات.

مقياس الرسم

- مقياس الرسم نسبة ثابتة بين الطول على الخريطة أو المخطط والطول الحقيقي المقابل له. نستعمل التناسب لإيجاد أحدهما من الآخر، مع الانتباه لتوحيد الوحدات قبل المقارنة.
- **مثال:** إذا كان مقياس الرسم على الخريطة $1:5000$ وكانت المسافة بين المدينتين 60 cm على الخريطة، فكم المسافة الحقيقية بالكيلومتر؟
- أ) 3
- ب) 6
- ج) 9
- د) 12
- **طريقة التعامل:** اضرب الطول على الخريطة في مقياس الرسم لتحصل على الطول الحقيقي بالسنتيمتر، ثم حوّله إلى كيلومترات.
- **الإجابة:** (أ) 3
- **خطوات الحل:**

1. الطول الحقيقي: $60\times 5000=300{,}000$ سم، أي 3 كم.

الكسر الواقع بين كسرين

- لإيجاد كسر يقع بين كسرين، نوحّد مقامات الكسرين الأصليين مع الخيارات المطروحة، ثم نختار الكسر الذي يقع بسطه بين بسطَي الطرفين بالمقام الموحّد نفسه؛ فالكسر المساوي لأحد الطرفين لا يقع بينهما.
- **مثال:** الكسر الذي يقع بين $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ هو
- أ) $\frac{18}{36}$
- ب) $\frac{18}{72}$
- ج) $\frac{12}{36}$
- د) $\frac{30}{72}$
- **طريقة التعامل:** وحّد المقامات إلى 72، ثم اختر الكسر الذي يقع بسطه بين بسطَي الكسرين الأصليين بالمقام نفسه.
- **الإجابة:** (د) $\frac{30}{72}$
- **خطوات الحل:**

1. $\frac{1}{2} = \frac{36}{72}$ و $\frac{1}{3} = \frac{24}{72}$، والكسر $\frac{30}{72}$ يحقق $24 < 30 < 36$

المعيار الثاني: الإلمام بمبادئ الجبر والدوال الحقيقية

المتطابقات والتحليل

- التحليل يعيد كتابة المقدار حاصل ضرب، والمتطابقة تصح لجميع القيم المسموحة. فرق مربعين يساوي الفرق بين العددين مضروبًا في مجموعهما. مربع المجموع يساوي مجموع المربعين مضافًا إليه ضعف حاصل الضرب. نستخدم هذه العلاقات لاستخراج مقدار مجهول من مجموع ومضروب معلومين.
- درجة الحد الجبري هي مجموع أسس متغيراته جميعًا، ودرجة المقدار الجبري هي أكبر درجة بين حدوده.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

- **مثال:** إذا كان $x + y = 4$ و $xy = 2$، فما قيمة

$$x^2 + y^2$$

- **طريقة التعامل:** اكتب مربع مجموع العددين ثم اطرح ضعف حاصل ضربهما للحصول على مجموع المربعين، دون البحث عن العددين نفسيهما.
- **الإجابة:** (ب) 12
- **خطوات الحل:**

1. بتربيع $x + y = 4$: $2x^2 + 2xy + y^2 = 16$. 2. بالتعويض $xy = 2$:
$x^2 + y^2 = 16 - 4 = 12$

المعادلة التربيعية والمميز

- نرتب التربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$، ثم نحلل أو نستخدم القانون العام: سالب معامل الحد الخطي، زائد أو ناقص جذر المميز، مقسومًا على ضعف معامل المربع. المميز هو مربع معامل الحد الخطي ناقص أربعة أمثال حاصل ضرب معامل المربع في الثابت؛ موجبُه يعطي جذرين حقيقيين، وصفره جذرًا مكررًا، وسالبُه لا يعطي جذورًا حقيقية.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- **مثال:** مجموعة حل المعادلة

$$2x^2 + 2x = x^2 + 3$$

- **طريقة التعامل:** انقل الحدود إلى طرف واحد واجمع المتشابه، ثم ابحث عن التحليل المناسب، وراجع الحلول في المعادلة الأصلية.
- **الإجابة:** (ب) $\{1, -3\}$
- **خطوات الحل:**

1. بنقل الحدود: $2x^2 + 2x - 3 = 0$. بالتحليل: $(x + 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -3$ أو $x = 1$

العلاقة بين جذري التربيعية

- مجموع جذري التربيعية يساوي سالب معامل الحد الخطي مقسومًا على معامل المربع، وحاصل ضربهما يساوي الثابت مقسومًا على معامل المربع. لتكوين معادلة من جذرين نضرب العاملين المرتبطين بهما.

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}, \qquad r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

- **مثال:** حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2 - 6x + 8 = 0$ هو
- **طريقة التعامل:** المطلوب حاصل ضرب الجذرين فقط؛ اقرأ معامل المربع والثابت واستعمل العلاقة المناسبة بدل حل المعادلة.
- **الإجابة:** (أ) 8
- **خطوات الحل:**

1. بقانون الجذرين مباشرة: حاصل الضرب يساوي $\frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$

معادلات القيمة المطلقة والجذور

- معادلة القيمة المطلقة تفتح حالتين إذا كان الطرف الآخر غير سالب: المقدار يساوي ذلك الطرف أو سالبَه. في المعادلة الجذرية نعزل الجذر ثم نربع، ونعود للأصل لاستبعاد الحل الدخيل. التربيع لا يغني عن شروط التعريف.
- **مثال:** مجموعة حل المعادلة $|2x - 1| = 5$ في R هي
- **طريقة التعامل:** اكتب حالتي المقدار داخل القيمة المطلقة، وحل كل حالة ثم راجع المقبول في الأصل.
- **الإجابة:** (أ) $\{3, -2\}$
- **خطوات الحل:**

1. الحالتان: $2x - 1 = 5$ أو $2x - 1 = -5$. الحلان: $x = 3$ أو $x = -2$، فمجموعة الحل $\{3, -2\}$

المتباينات

- نحل المتباينة كالخطية مع المحافظة على اتجاهها عند الجمع والطرح والضرب في موجب. عند الضرب أو القسمة في سالب نعكس الاتجاه. في ترميز الفترات، القوس المربع يشمل الطرف، والقوس المستدير يستبعده، واللانهاية ليست طرفًا مشمولًا.
- **مثال:** حل المتباينة

$$\frac{3-x}{5} \geq 0$$

- **طريقة التعامل:** تخلص من المقام الموجب ثم اعزل المتغير؛ إذا استعملت معاملًا سالبًا فلا تنسَ قلب إشارة المتباينة.
- **الإجابة:** (أ) $(-\infty, 3]$
- **خطوات الحل:**

1. بضرب الطرفين في 5: $3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$. مجموعة الحل: $(-\infty, 3]$

متباينات القيمة المطلقة

- متباينة $|u| \leq a$ (أو $<$) تكافئ $-a \leq u \leq a$: فترة واحدة متصلة. أما $|u| \geq a$ (أو $>$) فتكافئ $u \leq -a$ أو $u \geq a$: فترتان منفصلتان على طرفي الصفر. القاعدة تفترض $a > 0$؛ إذا كان a سالبًا فمجموعة حل $|u| \leq a$ خالية، ومجموعة حل $|u| \geq a$ كل الأعداد.
- **مثال:** مجموعة حل المتباينة $|3x - 2| \leq \frac{1}{2}$
- أ) $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- ب) $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$

- ج) $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right]$
- د) $\left[\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}\right]$
- **طريقة التعامل:** حوّل $|u| \leq a$ إلى $-a \leq u \leq a$، ثم اعزل x بعمليات متماثلة على الطرفين الثلاثة.
- **الإجابة:** (ج) $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right]$
- **خطوات الحل:**

1. نفك القيمة المطلقة: $-2 \leq 3x - 2 \leq \frac{1}{2}$. بإضافة 2 والقسمة على 3: $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{6}$

المتباينات التربيعية والنسبية

- في التربيعية والنسبية نوجد الأصفار والقيم الممنوعة، ونقسم خط الأعداد إلى فترات، ثم نختبر الإشارة. الصفر يدخل إذا سمحت علامة المساواة، وأصفار المقام تُستبعد دائمًا. لا نضرب في مقام مجهول الإشارة دون دراسة حالتيه.
- **مثال:** مجموعة حل المتباينة

$$x^2 - 4 \leq x - 2$$

- **طريقة التعامل:** اجمع الحدود في طرف واحد وحلل، ثم اختبر الإشارة بين الجذور وخارجها واكتب الفترات الموافقة للشرط.
- **الإجابة:** (ب) $[-1, 2]$
- **خطوات الحل:**

1. بنقل الحدود والتحليل: $(x-2)(x+1) \leq 0$. الإشارة سالبة بين الجذرين، فمجموعة الحل $[-1, 2]$

قوانين الأسس

- توحيد الأساس يختصر مسائل القوى. قوة القوة تضرب الأسس، وضرب القوى المتشابهة يجمعها، وقسمتها يطرحها. في المعادلة الأسية يجوز مساواة الأسين بعد توحيد أساس موجب غير واحد.
- **مثال:** إذا كان $2^x = 6$ فما قيمة

$$2^{2x}$$

- **طريقة التعامل:** لاحظ أن القوة المطلوبة هي مربع القوة المعطاة، واستعمل علاقة قوة القوة دون إيجاد المتغير.
- **الإجابة:** (د) 36
- **خطوات الحل:**

1. $2^{2x} = (2^x)^2 = 6^2 = 36$

اللوغاريتمات

- اللوغاريتم يجيب عن الأس الذي يرفع إليه الأساس لإنتاج العدد، أساسه موجب وغير واحد، ومدخله موجب. لوغاريتم الضرب مجموع اللوغاريتمين، والقسمة فرقُهما، والقوة ينزل أسها معاملًا. لوغاريتم مجموع عددين لا يتوزع عليهما. ولوغاريتم الأساس لنفسه يساوي واحدًا، ولوغاريته للواحد يساوي صفرًا.

$$\log_a b = c \iff a^c = b \qquad \log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0$$

- عند تغيير الأساس، يكتب لوغاريتم عدد بأساس معيّن كلوغاريتمين بأساس آخر مشترك (كالعشري أو الطبيعي) بالقسمة عليه، ويترتب على ذلك أن لوغاريتم عدد بأساس آخر هو مقلوب لوغاريتم ذلك الأساس بالعدد نفسه.

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

- **مثال:** إذا كان $5^x = 10$ فإن x تساوي
- **طريقة التعامل:** خذ لوغاريتم الطرفين ثم أنزل الأس معاملًا، واقسم على لوغاريتم الأساس مع مراعاة شروطه.
- **الإجابة:** (أ) $\dfrac{\log 10}{\log 5}$
- **خطوات الحل:**

1. بأخذ اللوغاريتم للطرفين: $2x \log 5 = \log 10$. إذن: $x = \dfrac{\log 10}{\log 5}$

اللوغاريتم الطبيعي والعدد e

- اللوغاريتم الطبيعي ln أساسه العدد e. الأسية الطبيعية واللوغاريتم الطبيعي عمليتان عكسيتان: لوغاريتم قوة للعدد e يعيد الأس، والأسية للوغاريتم عدد موجب تعيد العدد.
- **مثال:** إذا كان $3^{x+5} = e^2$، فإن قيمة x تساوي
- **طريقة التعامل:** خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين، ثم اعزل الأس الخطي؛ لا تخلط بين العدد الطبيعي للوغاريتم وبين الأس المجهول.
- **الإجابة:** (ج) $\dfrac{2 - 5\ln 3}{\ln 3}$
- **خطوات الحل:**

1. بأخذ ln: $2(x+5)\ln 3 = 2$. بالعزل: $x = \dfrac{2 - 5\ln 3}{\ln 3}$

أنواع المصفوفات

- المصفوفة ترتيب مستطيل للعناصر، ورتبتها عدد الصفوف ثم الأعمدة. القطرية صفر خارج قطرها الرئيس، والمتماثلة تساوي منقولها. نجمع ونطرح المصفوفات المتساوية الرتبة عنصرًا بعنصر؛ وفي الضرب نضرب صفًا في عمود، بعد توافق البعدين الداخليين. الضرب ليس تباديًا عمومًا.
- تتساوى مصفوفتان إذا تساوت رتبتاهما وتساوى كل عنصر فيهما مع نظيره في الموضع نفسه؛ هذا يحوّل معادلة مصفوفية إلى معادلات عددية منفصلة لكل عنصر.
- **مثال:** أي العبارات التالية صحيحة؟
- أ) كل مصفوفة قطرية لها معكوس
- ب) كل مصفوفة متماثلة لها معكوس
- ج) كل مصفوفة متماثلة مصفوفة قطرية
- د) كل مصفوفة قطرية هي مصفوفة متماثلة
- **طريقة التعامل:** راجع تعريف القطرية والمتماثلة وشروط وجود المعكوس، ولا تعامل وصف نوع المصفوفة وحده ضمانًا لقابليتها للانعكاس.
- **الإجابة:** (د) كل مصفوفة قطرية هي مصفوفة متماثلة
- **خطوات الحل:**

1. كل مصفوفة قطرية متماثلة (والعكس غير صحيح)، ووجود المعكوس غير مضمون إن كان أحد عناصر القطر صفراً.

المحدّدات وخواصّها

- المحدد عدد يرتبط بمصفوفة مربعة. في الرتبة الثانية نطرح حاصل ضرب القطر الثانوي من حاصل ضرب الرئيس. تبديل صفين يعكس الإشارة، والصفوف التابعة تجعل المحدد صفراً. ضرب المصفوفة كلها في ثابت يضرب المحدد في الثابت مرفوعاً إلى رتبتها. ومحدد المصفوفة المثلثية (كل العناصر تحت القطر الرئيس أو فوقه أصفار) أو القطرية من أي رتبة يساوي حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيس، فيكون صفراً إذا انعدم أحدها.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- **مثال:** إذا كان k عدداً حقيقياً و A مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$، فإن المحدد $|kA|$ يساوي
- **طريقة التعامل:** ميّز ضرب صف واحد في ثابت عن ضرب جميع الصفوف؛ عدد الصفوف يحدد قوة الثابت في أثره على المحدد.
- **الإجابة:** (ب) $k^n|A|$
- **خطوات الحل:**

1. ضرب المصفوفة في k يضرب كل صف من الصفوف الـn في k، فيضرب المحدد بـk لكل صف.
2. إذن: $|kA| = k^n|A|$

معكوس المصفوفة

- معكوس المصفوفة المربعة يعيد مصفوفة الوحدة عند الضرب، ويوجد إذا كان المحدد غير صفر. في الرتبة الثانية نبادل عنصرَي القطر الرئيس، ونغير إشارة العنصرين الآخرين، ثم نقسم على المحدد. معكوس حاصل ضرب يعكس ترتيب العوامل.

$$AA^{-1} = I$$

- **مثال:** معكوس المصفوفة

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

- **طريقة التعامل:** احسب المحدد الرمزي أولًا وحدد متى يكون غير صفر، ثم طبق خطوات معكوس المصفوفة ذات الرتبة الثانية.

- **الإجابة:** (أ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{ab} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$

- **خطوات الحل:**

1. المحدد: $2ab - 0 = ab$. 2. نبدّل عناصر القطر الرئيسي ونغيّر إشارة القطر الآخر، ثم نضرب في $\frac{1}{ab}$: $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{ab} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$

الأنظمة المتجانسة

- النظام المتجانس حدوده الثابتة صفر، ولذلك يقبل الحل الصفري دائمًا. إذا كان محدد معاملاته غير صفر فهو حله الوحيد، وإذا كان صفرًا توجد حلول غير صفرية أيضًا. شرط الحلول اللانهائية هنا يختلف عن نظام غير متجانس قد يكون متناقضًا.
- **مثال:** ما قيمة k التي تجعل للنظام $2x + y = 0$ و $(k+1)x + \frac{1}{2}y = 0$ حلولاً غير منتهية؟
- **طريقة التعامل:** كوّن محدد معاملات المجهولين واجعله صفرًا، ثم تحقق من تبعية المعادلتين.
- **الإجابة:** (أ) 0
- **خطوات الحل:**

1. نساوي المحدد بالصفر: $2 - (k+1) = 0$. إذن: $k = 0$

أنظمة المعادلات وطرق حلّها

- التعويض يكتب مجهولًا بدلالة الآخر، والحذف يزيل أحد المجهولين بجمع المعادلتين أو طرحهما بعد توحيد معاملاته. نقطة تقاطع مستقيمين تحقق معادلتيهما معًا؛ والتوازي أو التطابق يحدد عدم الحل أو تعدده.
- طريقة ثالثة تعتمد على المحددات (قاعدة كرامر): لنظام $ax + by = m$ و $cx + dy = n$، نكوّن محدد المعاملات، ثم نستبدل عمود المعاملات الموافق لكل مجهول بعمود الحدود الثابتة لنحصل على محدده، فيساوي المجهول محدده على محدد المعاملات، بشرط ألّا يكون هذا الأخير صفرًا.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

- **مثال:** أوجد حل النظام $y = 2x - 5$ و

$$y = x - 2$$

- **طريقة التعامل:** الطرفان يعطيان المتغير نفسه، ساوِ التعبيرين، ثم عوض لإيجاد المتغير الآخر وتحقق في المعادلتين.
- **الإجابة:** (أ) $(3, 1)$
- **خطوات الحل:**

1. بمساواة المعادلتين: $2x - 5 = x - 2 \Rightarrow x = 3$. بالتعويض: $y = 3 - 2 = 1$

كثيرات الحدود: نظرية العامل والباقي

- باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - a$ يساوي قيمتها عند a، ويكون هذا المقدار عاملًا إذا كانت القيمة صفرًا. إيجاد الأصفار يعني إيجاد قيم المتغير التي تجعل كثيرة الحدود صفرًا.
- **مثال:** إذا كان $x - 1$ قاسماً لكثيرة الحدود $f(x) = x^5 - nx^3 - nx + 1$، فإن قيمة n تساوي
- **طريقة التعامل:** بما أن العامل المعطى يقسم كثيرة الحدود، عوض بالقيمة التي تجعله صفرًا، ثم استخدم شرط انعدام الباقي لتحديد المعامل.
- **الإجابة:** (ج) 1
- **خطوات الحل:**

1. بما أن $x - 1$ قاسم فـ $x = 1$ جذر: $1 - 2n + 1 = 0$. إذن: $n = 1$

العمليات على الكسور الجبرية

- نحلل البسط والمقام ونختصر العوامل المشتركة، مع إبقاء قيم المقام الأصلي ممنوعة. نجمع الكسور بمقام مشترك، ونقسم بضرب المقلوب غير الصفري. لا نختصر حدًا من مجموع أو فرق.
- **مثال:** بسّط المقدار

$$\frac{16-4x}{x^2-16}$$

- **طريقة التعامل:** أخرج العامل المشترك وحلل فرق المربعين، ثم اختصر العامل الكامل مع تسجيل القيم المستبعدة من المقام الأصلي.
- **الإجابة:** (ب) $\dfrac{-4}{x+4}$
- **خطوات الحل:**

1. نحلّل: $\dfrac{-4(x-4)}{(x-4)(x+4)}$ 2. بالاختصار: $\dfrac{-4}{x+4}$

النمذجة بالمعادلات والمسائل اللفظية

- نمذجة المسألة تعني اختيار مجهول وترجمة العلاقات إلى معادلة. ميز ثمن الوحدة من الثمن الكلي، والكمية الأصلية من الباقي بعد الصرف، ثم تحقق أن المعادلة تمثل المعطيات كلها.
- **مثال:** "اشترى محمد ثلاثة كتب لها نفس السعر وأعطى البائع مبلغ 50 ريالاً، فأعاد له البائع 11 ريالاً. ما سعر الكتاب؟" المعادلة التي تمثل هذه المسألة هي
- **طريقة التعامل:** اجعل سعر الكتاب مجهولًا، واربط ثمن الكتب بالمبلغ المدفوع مطروحًا منه الباقي، دون البدء بحساب السعر.
- **الإجابة:** (أ) $3x+11=50$

- **خطوات الحل:**

1. نفرض x سعر الكتاب، فثمن الكتب $3x$، وإعادة 11 ريالاً تعني زيادتها: $3x + 11 = 50$

الدوال والمجال

- المجال هو المدخلات المسموحة. نستبعد أصفار المقام، ونشترط عدم سلبية ما تحت الجذر الزوجي وإيجابية مدخل اللوغاريتم. إذا كان الجذر الزوجي في المقام نشترط إيجابية ما تحته. الجذر الفردي لا يمنع المدخلات الحقيقية بسبب الإشارة وحدها.
- **مثال:** مجال الدالة

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{x^2+16}}$$

- **طريقة التعامل:** افحص المقام أولًا، ثم حل شرط ما تحت الجذر غير السالب؛ تقاطع الشروط هو المجال.
- **الإجابة:** (د) $[4, \infty)$
- **خطوات الحل:**

1. المقام $x^2 + 16$ موجب دائمًا، فمجاله R. 2. شرط البسط: $3x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$. 3. التقاطع: $[4, \infty)$

مجال العمليات على الدوال

- مجال جمع الدالتين أو ضربهما هو تقاطع مجاليهما، وفي القسمة نستبعد أيضًا أصفار الدالة المقسوم عليها. تركيب الدوال يتطلب تعريف الداخلية وقبول نتيجتها في الخارجية، حتى لو اختفت بعض القيود بعد التبسيط.
- **مثال:** إذا كانت $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \frac{1}{x}$، فإن مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ هو
- **طريقة التعامل:** احتفظ بقيود الدالتين الأصليتين قبل التبسيط، ثم افحص هل المقسوم عليها تنعدم عند قيمة مسموحة.
- **الإجابة:** (ب) $R - \{0\}$
- **خطوات الحل:**

1. مجال $f = R$ ومجال $g = R - \{0\}$. المجال المشترك: $R - \{0\}$

المدى

- المدى هو القيم التي يمكن أن تخرج من الدالة. في التربيعية تحدد قيمة الرأس الحد الأدنى أو الأعلى بحسب اتجاه الفتحة. الجذر الزوجي غير سالب، والقيمة المطلقة غير سالبة قبل التحويلات؛ والانسحاب الرأسي يزيح المدى.
- **مثال:** مدى الدالة

$$f(x) = 1 - x^2$$

- **طريقة التعامل:** حدد أكبر قيمة يسمح بها سالب المربع، ثم أثر الثابت المضاف؛ لا تخلط قيم المخرجات مع قيم المجال.
- **الإجابة:** (د) $(-\infty, 1]$
- **خطوات الحل:**

1. بما أن $x^2 \geq 0$ فإن $1 - x^2 \leq 1$، والقيمة العظمى 1 عند $2x = 0$. المدى: $(-\infty, 1]$

تركيب الدوال

- في التركيب تطبق الدالة الداخلية أولًا، ثم تجعل ناتجها مدخلًا للخارجية. ترتيب الدالتين مهم، ورمز الدائرة يدل على التركيب لا على الضرب.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

- **مثال:** إذا كانت $f(x) = \tan x$ و $g(x) = \sqrt{x}$، فإن $(f \circ g)(x)$ تساوي
- **طريقة التعامل:** استبدل مدخل الدالة الخارجية بعبارة الدالة الداخلية كاملة، مع إبقاء الأقواس وشروط التعريف.
- **الإجابة:** (أ) $\tan \sqrt{x}$
- **خطوات الحل:**

1. $(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = \tan \sqrt{x}$

الدالة العكسية

- لإيجاد الدالة العكسية نبادل المدخل والمخرج ثم نحل للمخرج الجديد. يلزم أن تكون الدالة واحدًا لواحد على المجال المعتمد، ومجال العكسية هو مدى الأصلية. العكسية ليست مقلوب قيمة الدالة.
- **مثال:** الدالة العكسية للدالة

$$f(x) = \frac{1}{x + 1}$$

- **طريقة التعامل:** سمّ المخرج، ثم بادل المتغيرين واعزل المخرج الجديد مع تحديد القيم غير

المسموحة.

- **الإجابة:** (ج) $\dfrac{1-x}{x}$
- **خطوات الحل:**

1. نبدّل المتغيرين: $2x = \dfrac{1}{y+1}$. نعزل y: $x(y+1) = 1 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{1-x}{x}$

الزوجية والفردية والتماثل

- الزوجية تحقق $f(-x) = f(x)$، والفردية تحقق $f(-x) = -f(x)$، ويجب أن يكون المجال متماثلًا حول الصفر. الرسم الزوجي متماثل حول محور الصادات، والفردي حول الأصل. التبسيط لا يعيد نقطة مستبعدة من المجال.
- **مثال:** ما نوع الدالة

$$f(x) = \frac{x}{x^3 + x}$$

- **طريقة التعامل:** عوض بسالب المتغير في الصيغة الأصلية وقارن، مع التحقق من تماثل المجال قبل إصدار الحكم.
- **الإجابة:** (أ) زوجية
- **خطوات الحل:**

1. بالتعويض بـ$-x$: $f(x) = \dfrac{x}{x^3+x} = \dfrac{-x}{-(x^3+x)} = f(-x)$. بما أن $f(-x) = f(x)$ فالدالة زوجية.

مقاطع المحاور وقراءة المنحنى

- المقطع الصادي ينتج بوضع السين صفرًا، والمقاطع السينية تنتج بجعل المخرج صفرًا. في قراءة منحنى نفرق بين موضع النقطة وقيمة الدالة، وبين التقاطع ولمس المحور.
- **مثال:** الدالة $f(x) = x^2 - 4$ تقطع محور y عند النقطة
- **طريقة التعامل:** المطلوب تقاطع محور الصادات؛ ضع المدخل صفرًا، ثم اكتب الإحداثيين بالترتيب المعتاد.
- **الإجابة:** (د) $(0, -4)$
- **خطوات الحل:**

1. عند $x = 0$: $f(0) = -4$، فنقطة التقاطع $(0, -4)$

التحويلات الهندسية على الدوال

- إضافة ثابت خارج الدالة تنقل الرسم رأسيًا، وتغيير المدخل ينقله أفقيًا في الاتجاه المعاكس للإشارة المكتوبة. السالب خارج الدالة انعكاس حول محور السينات، والسالب داخلها انعكاس حول محور الصادات؛ ومعامل القياس يغير التمدد أو الانكماش.
- **مثال:** يمكن الحصول على منحنى الدالة $f(x) = |x| - 5$ من إزاحة منحنى الدالة

$$f(x) = |x|$$

- **طريقة التعامل:** حدد موضع التغيير: الثابت خارج رمز القيمة المطلقة، لذلك فسّر أثره بوصفه انتقالًا رأسيًا.
- **الإجابة:** (د) 5 وحدات للأسفل
- **خطوات الحل:**

1. الطرح خارج الدالة إزاحة رأسية، وإشارته سالبة، فالإزاحة للأسفل بمقدار 5 وحدات.

المتتابعة الحسابية

- الحسابية فرقها بين حدين متتاليين ثابت. الحد المطلوب يساوي الأول مضافًا إليه حاصل ضرب الفرق في عدد الانتقالات. مجموعها يساوي نصف عدد الحدود مضروبًا في مجموع الأول والأخير.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

- **مثال:** عدد المثلثات في النمط السادس يساوي (النمط: $1,\ 4,\ 7, \ldots$)
- **طريقة التعامل:** استخرج الفرق من الحدود الأولى، ثم عدّ الانتقالات من الحد الأول إلى رتبة الحد المطلوب.
- **الإجابة:** (د) 16
- **خطوات الحل:**

1. الزيادة الثابتة 3: الحدود $1, 4, 7, 10, 13, 16, 21$. الحد السادس يساوي 16

المتتابعة الهندسية

- الهندسية نسبتها بين حدين متتاليين ثابتة. الحد المطلوب يساوي الأول مضروبًا في النسبة مرفوعة إلى عدد الانتقالات، وتحديد النسبة يسبق استعمال القانون.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

- **مثال:** الحد التاسع في النمط

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{8}{27}, \ldots$$

- **طريقة التعامل:** اقسم حدًا على سابقه لتحديد النسبة، ثم طبقها بعدد الانتقالات المناسب لرتبة الحد المطلوب.

- **الإجابة:** (ج) $\frac{2^9}{3^9}$
- **خطوات الحل:**

1. الحد النوني: $2a_n = \frac{2^n}{3^n}$. بالتعويض $n = 9$: $a_9 = \frac{2^9}{3^9}$

المعادلات المثلثية

- في المعادلة المثلثية نستعمل المتطابقات ثم القيم المثلثية وإشارات الأرباع. نبحث عن جميع الحلول داخل الفترة المحددة، لا عن الزاوية الأساسية وحدها، ووحدة الزاوية جزء من السؤال.
- **مثال:** مجموعة حل المعادلة $\sin^2 x - 1 = 0$ حيث $x \in [0, 2\pi]$ هي
- **طريقة التعامل:** اعزل مربع الجيب، ثم افحص قيم الجيب الممكنة والمواضع الموافقة لها داخل الفترة المعطاة.
- **الإجابة:** (د) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$
- **خطوات الحل:**

1. نعزل: $2\sin^2 x = 1 \;\Rightarrow\; \sin x = \pm 1$. يتحقق عند $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$

العمليات على المجموعات

- الاتحاد يجمع عناصر المجموعتين دون تكرار، والتقاطع يأخذ المشتركة فقط، والمتممة تتعلق بالمجموعة الشاملة. الأقواس تحدد ترتيب العمليات؛ والمجموعة الخالية لا تضم عناصر.
- **مثال:** إذا كانت $A = \{a, d, e, f\}$ و $B = \{b, c, e\}$ و $C = \{a, f, j\}$، فإن $(B \cup C) \cap A$ يساوي

- **طريقة التعامل:** نفذ العملية داخل القوس أولًا، ثم خذ العناصر المشتركة مع المجموعة الأخرى دون عدّ العنصر مرتين.
- **الإجابة:** (أ) $\{a, e, f\}$
- **خطوات الحل:**

1. الاتحاد: $B \cup C = \{a, b, c, e, f, j\}$ 2. التقاطع مع A: $\{a, e, f\}$

المسوّرات والمغالطات

- المسور «لكل» يحتاج حكمًا صحيحًا لجميع عناصر المجموعة، و«يوجد» يكفيه عنصر واحد. في فحص مغالطة جبريّة راقب القسمة على صفر، والجذر، والتربيع الذي قد يغير تكافؤ الخطوات.
- **مثال:** ما أول خطوة نتجت من خطأ رياضي في المغالطة التالية؟

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2$$

1. $x(x - x) = (x - x)(x + x)$
2. $x = (x + x)$
3. $x = 2x$
4. $1 = 2$

- **طريقة التعامل:** راجع كل انتقال بين سطرين، وحدد أول عملية غير مسموحة بدل الحكم على آخر نتيجة فقط.
- **الإجابة:** (ب) 2
- **خطوات الحل:**

1. الخطوة الثانية قسمت الطرفين على $x - x$، وهو صفر، والقسمة على صفر غير جائزة.

أدوات سريعة للمسائل اللفظية

- في مسائل العمل نجمع معدلات الإنجاز. العامل الذي ينهي عملًا في زمن محدد ينجز في وحدة الزمن مقلوب ذلك الزمن من العمل؛ والزمن المشترك يرتبط بمجموع المعدلين.
- **مثال:** عامل ينجز عمله في 9 ساعات، إذا ساعده عامل آخر وأنجزا عملهما في 3 ساعات، فكم عدد الساعات التي يستغرقها العامل الآخر إذا عمل بمفرده؟
- **طريقة التعامل:** حوّل كل زمن إلى معدل إنجاز، ثم استخرج معدل العامل المجهول من المعدل المشترك، وبعده اربطه بزمنه.
- **الإجابة:** (أ) $\frac{9}{2}$
- **خطوات الحل:**

1. معادلة المعدلات: $2\frac{1}{9} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$. بالحل: $3x + 27 = 9x \;\Rightarrow\; x = \frac{9}{2}$

الأنماط العددية

- النمط قد يعتمد فرقًا ثابتًا أو نسبة ثابتة أو قاعدة تحول الحد السابق إلى اللاحق. نفحص القاعدة في أكثر من انتقال، ولا نعتمد أول حدين فقط إذا لم تتفق مع البقية.
- **مثال:** العدد التالي في النمط

$$2,\ 5,\ 11,\ 23, \ldots$$

- **طريقة التعامل:** قارن الفروق أولًا، ثم افحص قاعدة ضرب يتبعه جمع، وتحقق منها على جميع الانتقالات المعطاة.
- **الإجابة:** (د) 47
- **خطوات الحل:**

1. فروق الحدود $3, 6, 12$ تتضاعف، فالفرق التالي 224. الحد التالي: $23 + 24 = 47$

معادلات الأسس واللوغاريتمات

- عند تساوي الأساسين في معادلة أسية نساوي الأسين مباشرة، وعند ضرب قوتين لهما الأساس نفسه نجمع أسيهما. نستعمل هذين المبدأين معًا لحل معادلة أسية بسيطة دون آلة حاسبة.
- **مثال:** إذا كان $e^{-5x}e^{x} = e^{2}$ فإن قيمة x تساوي
- أ) -2
- ب) $\frac{1}{2}$
- ج) $-\frac{1}{2}$
- د) 2
- **طريقة التعامل:** اجمع الأسس في الطرف الأيسر أولًا لتوحيد الأساس، ثم ساوِ الأسين.
- **الإجابة:** (ج) $-\frac{1}{2}$
- **خطوات الحل:**

1. نجمع الأسس: $2e^{-4x} = e^{2}$. نساوي الأسين: $-4x = 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

التمثيل البياني لنظام متباينتين

- عند متباينتين معًا نرسم خط كل متباينة ونحدد نصف المستوى الذي تمثله، ثم نأخذ المنطقة المشتركة بين التظليلين فقط، لا أيًّا منهما بمفرده.
- **مثال:** المنطقة التي تحقق مجموعة حل نظام المتباينات $x + 3y \geq 3$ و $3x + y \leq -3$ هي (المناطق A, B, C, D في الشكل)
- أ) A
- ب) B

- ج) C
- د) D
- **طريقة التعامل:** اختبر نقطة من كل منطقة مرشحة في المتباينتين معًا، أو ظلل كل متباينة على حدة وحدد تقاطع التظليلين.
- **الإجابة:** (أ) A
- **خطوات الحل:**

1. نرسم خط كل متباينة ونظلل جهتها.
2. التقاطع المشترك للتظليلين هو المنطقة A

تمييز الدالة من بين العلاقات

- العلاقة تمثل دالة إذا ناظر كل عنصر في x عنصرًا واحدًا فقط في y. إذا كانت درجة y في معادلة العلاقة زوجية فغالبًا ينتج لكل x قيمتان لـ y، فلا تكون العلاقة دالة.
- **مثال:** أي من العلاقات الآتية تمثل y دالة في x؟
- أ) $x^2 = 5y^2$
- ب) $y - 3x^2 = 6$
- ج) $2y^3 + 3x^2 = 8$
- د) $\dfrac{x}{y} = y - 6$
- **طريقة التعامل:** اعزل y ذهنيًا في كل خيار وانظر إلى درجته؛ إن كانت درجته الأولى فالعلاقة دالة، وإن كانت زوجية فافحص احتمال قيمتين.
- **الإجابة:** (ب) $y - 3x^2 = 6$
- **خطوات الحل:**

1. في الخيار (ب) درجة y هي الأولى فقط.
2. أما بقية الخيارات فدرجة y فيها زوجية، فتعطي قيمتين لكل x

حل معادلات الدرجة الرابعة بالتحليل

- نحل معادلة من الدرجة الرابعة بمعاملة x^2 كمتغير جديد وتحليل المقدار كفرق مربعين أو مربع كامل، ثم نستبعد العامل الذي لا يملك حلًا حقيقيًا.
- **مثال:** مجموعة حل المعادلة $x^4 - 1 = 0$ في مجموعة الأعداد الحقيقية R هي
- أ) $\{1\}$
- ب) $\{-1\}$
- ج) $\{1, -1\}$
- د) $\varnothing$
- **طريقة التعامل:** حلّل المقدار كفرق بين مربعين مرتين متتاليتين، وتذكّر أن أحد العاملين الناتجين قد لا يملك جذرًا حقيقيًا.
- **الإجابة:** (ج) $\{1, -1\}$
- **خطوات الحل:**

1. نحلل: $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$ 2. العامل $x^2 = 1$ يعطي $x = \pm 1$، والعامل $x^2 = -1$ مستحيل في R

عدد جذور التربيعية وتقاطعها مع محور السينات

- عدد جذور التربيعية الحقيقية يحدد علاقة منحناها بمحور السينات: جذران مختلفان يعنيان قطعًا في نقطتين، جذر واحد مكرر يعني مماسًا للمحور دون قطعه، ولا جذور حقيقية تعني أن المنحنى لا يلتقي المحور إطلاقًا.
- **مثال:** اعتبر الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$، إذا علمت أنه توجد x_0 وحيدة تحقق $f(x_0) = 0$، فيمكن استنتاج أن
- أ) الدالة f تمس محور x
- ب) الدالة f تقع كاملة فوق محور x
- ج) الدالة f تقع كاملة تحت محور x
- د) الدالة f تقطع محور x في نقطتين
- **طريقة التعامل:** اربط وجود صفر وحيد للدالة بعدد نقاط التقاء منحناها مع محور السينات.
- **الإجابة:** (أ) الدالة f تمس محور x
- **خطوات الحل:**

1. صفر وحيد يعني التقاء المنحنى بمحور x في نقطة واحدة فقط.
2. هذا يعني أن المنحنى يمسّ المحور ولا يقطعه.

تبسيط الكسور الجبرية بالتحليل

- لتبسيط كسر جبري نحلل البسط والمقام إلى عوامل مشتركة ثم نختصرها، مع الانتباه إلى أن تبديل حدي الفرق $(a - b)$ إلى $(b - a)$ يقلب إشارة العامل فقط.
- **مثال:** تبسيط العبارة $\dfrac{xy^2 - yx^2}{x^2 - y^2}$
- أ) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$

- ب) $\frac{1}{y} - \frac{1}{x}$
- ج) $\frac{xy}{x+y}$
- د) $\frac{-xy}{x+y}$
- **طريقة التعامل:** أخرج العامل المشترك من البسط وحلل المقام كفرق مربعين، وانتبه لعكس إشارة أحد العاملين قبل الاختصار.
- **الإجابة:** (د) $\frac{-xy}{x+y}$
- **خطوات الحل:**

1. البسط $xy(y-x)$، والمقام $2(x-y)(x+y)$. نعكس إشارة $(y-x)$ إلى $-(x-y)$ ونختصر: الناتج $\frac{-xy}{x+y}$

تعامد المتجهات بالضرب القياسي

- متجهان متعامدان إذا كان ضربهما القياسي، وهو حاصل ضرب المركبات المتناظرة ثم جمعها، يساوي صفراً.
- **مثال:** إذا كان المتجهان $\langle 1,2,4\rangle$ و $\langle 2,4,k\rangle$ متعامدين، فإن قيمة k
- أ) $\frac{5}{2}$
- ب) $\frac{-5}{2}$
- ج) 8
- د) -8
- **طريقة التعامل:** اكتب الضرب القياسي للمتجهين وساوِه بالصفر، ثم اعزل k
- **الإجابة:** (ب) $\frac{-5}{2}$

- **خطوات الحل:**

1. الضرب القياسي: $22 + 8 + 4k = 0$. إذن $k = \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2}$

نفي العبارات ذات المسورين المتعددين

- عند نفي عبارة فيها مسوران متتاليان، يُقلب كل مسور إلى نقيضه (لكل إلى يوجد، ويوجد إلى لكل) مع إبقاء ترتيب المتغيرات كما هو، ثم يُنفى المحمول وحده في النهاية.
- **مثال:** نفي العبارة: "لكل $y \in \mathbb{R}$ يوجد $x \in \mathbb{R}$ حيث $y^2 > x$"
- أ) $\exists y \in R \, \forall x : \; y^2 > x$
- ب) $\forall y \in R \, \exists x : \; y^2 \leq x$
- ج) $\exists y \in R \, \forall x : \; y^2 \leq x$
- د) $\exists x \in R \, \forall y : \; y^2 \leq x$
- **طريقة التعامل:** اقلب كل مسور إلى نقيضه بترتيبه نفسه أولًا، ثم انفِ المحمول وحده أخيرًا.
- **الإجابة:** (ج) $\exists y \in R \, \forall x : \; y^2 \leq x$
- **خطوات الحل:**

1. نقلب المسورين بترتيبهما: $\forall y \exists x$ تصبح $\exists y \forall x$2. ثم ننفي المحمول وحده: $y^2 > x$ تصبح $y^2 \leq x$

المعيار الثالث: الهندسة

أنواع الزوايا وعلاقاتها

- المتتامتان مجموعهما تسعون درجة، والمتكاملتان مجموعهما مئة وثمانون. المتقابلتان بالرأس متساويتان، والمتجاورتان على مستقيم متكاملتان. حول نقطة مجموع الزوايا ثلاثمئة وستون؛ ولا نستنتج قياسًا من شكل الرسم وحده.
- **مثال:** زاويتان متتامتان النسبة بين قياسيهما $4:1$، قياس الزاوية الصغرى يساوي
- **طريقة التعامل:** وزّع مجموع الزاويتين المتتامتين على أجزاء النسبة، ثم اربط كل زاوية بعدد أجزائها.
- **الإجابة:** (ب) 18°
- **خطوات الحل:**

1. $x + 4x = 90 \Rightarrow x = 18^\circ$

الزوايا والمستقيمات المتوازية

- إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين، تساوت المتناظرة والمتبادلة، وتكاملت الداخلتان من جهة واحدة. نحدد نوع علاقة الزاويتين قبل كتابة المعادلة، ويمكن عكس بعض هذه العلاقات لإثبات التوازي.
- **مثال:** في الشكل الموضح أعلاه، إذا كان المستقيمان متوازيين، فأوجد قيمة x (الزاويتان $2x^\circ$ و $(3x - 5)^\circ$ زاويتان داخليتان من جهة واحدة بين المستقيمين المتوازيين)

- **طريقة التعامل:** الزاويتان داخليتان من جهة واحدة؛ اجعل مجموع عبارتيهما مساويًا لزاوية مستقيمة، ثم اعزل المجهول.
- **الإجابة:** (ب) 37
- **خطوات الحل:**

1. زاويتان داخليتان من جهة واحدة، مجموعهما 180°: $2x + (3x - 5) = 180 \Rightarrow x = 37$

المضلّعات وزواياها

- مجموع الزوايا الداخلية لمضلع يساوي عدد أضلاعه ناقص اثنين مضروبًا في مئة وثمانين درجة. مجموع الخارجية المأخوذة في اتجاه واحد دورة كاملة، وفي المنتظم تتساوى؛ فتساوي الخارجية ثلاثمئة وستين مقسومة على عدد الأضلاع.
- عند كل رأس، الزاوية الداخلية والخارجية متكاملتان: داخلية + خارجية = 180°. فالزاوية الداخلية للمضلع المنتظم $= \dfrac{(n-2)\times 180^\circ}{n}$، أو ببساطة 180° ناقص الخارجية؛ وهذا يسمح بإيجاد عدد الأضلاع من أي من الزاويتين.
- **مثال:** مضلع خماسي منتظم؛ ما قياس زاويته الخارجية بالدرجات؟
- **طريقة التعامل:** تأكد أن المطلوب زاوية خارجية وأن المضلع منتظم، ثم وزّع الدورة الكاملة على عدد الأضلاع.
- **الإجابة:** (د) 72
- **خطوات الحل:**

1. الزاوية الداخلية: $\dfrac{(5-2)\times 180}{5} = 108^\circ$ 2. الخارجية المجاورة: $x = 180 - 108 = 72^\circ$

المثلث: الخصائص والمتباينة

- مجموع زوايا المثلث مئة وثمانون درجة، والخارجية تساوي مجموع الداخليتين البعيدتين. مجموع طولَي أي ضلعين أكبر من الثالث، والضلع الأطول يقابل الزاوية الأكبر. متطابق الضلعين تتساوى زاويتا قاعدته.
- **مثال:** النسبة بين قياس زوايا مثلث هي $5 : 3 : 1$، ما قياس أكبر زواياه؟
- **طريقة التعامل:** اجمع أجزاء النسبة، ووزّع مجموع زوايا المثلث عليها، ثم حدد الزاوية التي تقابل الجزء الأكبر.
- **الإجابة:** (ب) 100°
- **خطوات الحل:**

1. مجموع النسبة $1 + 3 + 5 = 9$، الجزء يساوي $2180/9 = 20$. أكبر زاوية تساوي $20 \times 5 = 100^\circ$

المتوسطات والارتفاعات ومركز الثقل

- المتوسط يصل رأس المثلث بمنتصف الضلع المقابل؛ ومركز الثقل يقسمه بنسبة اثنين إلى واحد من جهة الرأس. العمود المنصف للضلع يحدد نقاطًا متساوية البعد من طرفيه، وتلتقي الأعمدة المنصفة في مركز الدائرة المحيطة. الارتفاع عمودي على الضلع أو امتداده.
- **مثال:** إذا علمت أن O هي نقطة التقاء العمودين المنصفين للضلعين AB و AC، وكان $|OB| = 10$، فما طول

$$OC$$

- **طريقة التعامل:** نقطة تقاطع العمودين المنصفين مركز الدائرة المحيطة؛ قارن المسافتين بوصفهما نصفَي قطر للدائرة نفسها.
- **الإجابة:** (د) 10

- **خطوات الحل:**

1. نقطة تلاقي المنصّفات مركز الدائرة المحيطة، فأنصاف الأقطار متساوية: $OC = OB = 10$

المثلث القائم: فيثاغورس والعلاقات المترية

- في المثلث القائم مربع الوتر يساوي مجموع مربعَي الضلعين القائمين. الوتر يقابل الزاوية القائمة، لا أكبر عدد مكتوب اعتباطًا. المتوسط إلى الوتر نصفه، ويمكن إيجاد الارتفاع على الوتر بمساواة تعبيري مساحة المثلث.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- **مثال:** مستطيل قطره 5 cm وأحد أضلاعه 4 cm، أوجد مساحته
- **طريقة التعامل:** قطر المستطيل وتر مثلث قائم؛ استخرج الضلع المفقود بفيثاغورس، ثم استعمل الضلعين في قانون مساحة المستطيل.
- **الإجابة:** (ب) 12
- **خطوات الحل:**

1. فيثاغورس: الضلع الآخر يساوي $2\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm. المساحة تساوي $4 \times 3 = 12$ cm^2

المثلثان الخاصان

- في المثلث الثلاثيني الستيني، المقابل لثلاثين درجة نصف الوتر، والمقابل لستين يساوي المقابل لثلاثين مضروبًا في جذر ثلاثة. وفي القائم المتطابق الضلعين الوتر يساوي الضلع مضروبًا في جذر اثنين. ولإيجاد ارتفاع (ضلع مقابل) من وتر وزاوية نستعمل الجيب: جيب الزاوية يساوي طول الضلع المقابل على طول الوتر، فالمقابل يساوي الوتر مضروبًا في جيب الزاوية.

- **مثال:** تم إسناد سلّم طوله 6 m على جدار ويصنع زاوية $30°$ ثم تم رفعه إلى أن أصبحت الزاوية $45°$، فكم الفرق في المسافة على الجدار؟
- **طريقة التعامل:** احسب ارتفاع نهاية السلم من طول السلم وجيب زاويته في كل وضع، ثم قارن الارتفاعين، لا تستعمل طول السلم بوصفه ارتفاعًا.
- **الإجابة:** (أ) $3(\sqrt{2}-1)$
- **خطوات الحل:**

1. $\sin 30° = x/6 \Rightarrow x = 3$، و $2\sin 45° = x/6 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$. الفرق يساوي $3\sqrt{2} - 3 = 3(\sqrt{2}-1)$

التشابه والتطابق

- التشابه يحافظ على الزوايا والنسب بين الأضلاع المتناظرة، والتطابق يحافظ أيضًا على الأطوال نفسها. ترتيب الحروف يحدد التناظر. القطعة الموازية لضلع في المثلث تنتج مثلثًا مشابهًا وتناسبًا بين الأجزاء.
- **مثال:** طول ظل طفل على الجدار يساوي 3 وطول الطفل يساوي 1، فما المسافة بين الطفل والجدار إذا كانت المسافة بين الطفل والمصباح تساوي 2؟
- **طريقة التعامل:** حدد المثلثين الناتجين عن الضوء والظل، وقابل الأطوال المتناظرة قبل تكوين نسبة المسافات والارتفاعات.
- **الإجابة:** (ب) 4
- **خطوات الحل:**

1. بتشابه المثلثين: $21/2 = 3/x \Rightarrow x = 6$. المسافة عن الجدار تساوي $6 - 2 = 4$

الأشكال الرباعية

- متوازي الأضلاع أضلاعه المتقابلة متوازية ومتساوية وقطراه ينصف أحدهما الآخر. المستطيل زواياه قائمة، والمعين أضلاعه متساوية، والمربع يجمع الخاصيتين. في شبه المنحرف زوج من الأضلاع المتقابلة متوازٍ، والقطعة المتوسطة نصف مجموع القاعدتين. وبما أن القاعدتين متوازيتان، فكل ضلع جانبي قاطع لهما، فتكون الزاويتان على طرفيه من الجهة نفسها متكاملتين (مجموعهما 180°).
- **مثال:** $ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه AB وDC، أوجد $m\angle A$ إذا كانت

$$m\angle D = 80^\circ$$

- **طريقة التعامل:** حدد الضلعين المتوازيين في شبه المنحرف، واستعمل تكامل زاويتي الضلع الجانبي بينهما.
- **الإجابة:** (ب) 100°
- **خطوات الحل:**

1. $AB \parallel DC$ في $\angle A, \angle D$ متحالفتان: $m\angle A = 180 - 80 = 100^\circ$

الدائرة: الأوتار والأقواس والزوايا

- الزاوية المركزية تساوي قياس قوسها بالدرجات، والمحيطية نصف القوس نفسه. الزاوية في نصف دائرة قائمة، ومتقابلتا الرباعي الدائري متكاملتان. الأوتار المتساوية تقابل أقواسًا متساوية، والعمود من المركز إلى وتر ينصفه.
- **مثال:** أوجد قياس الزاوية المركزية x في الشكل المجاور، إذا كانت الزاوية المحيطية المقابلة للقوس نفسه

$$35^\circ$$

- **طريقة التعامل:** الزاويتان تقابلان القوس نفسه؛ اربط المركزية بالمحيطية بعلاقة الضعف، لا بتساوي القياسين.

- **الإجابة:** (ب) $70°$
- **خطوات الحل:**

1. القوس المقابل للزاوية المحيطية يساوي $35 \times 22 = 70°$. الزاوية المركزية تساوي قياس قوسها: $m\angle x = 70°$

المماسات وقوة النقطة

- المماس عمودي على نصف القطر عند التماس، وطولا المماسين من نقطة خارجية واحدة متساويان. في قوة النقطة نساوي حاصلَي ضرب الجزأين في الوترين المتقاطعين، أو مربع المماس بحاصل ضرب الجزء الخارجي للقاطع في طوله كله، بحسب الشكل.
- **مثال:** إذا كان المستقيم ab مماساً للدائرة C عند النقطة b، والزاوية عند المركز $57°$، ما قيمة الزاوية

$$cab$$

- **طريقة التعامل:** كوّن المثلث الذي يحتوي نصف القطر والمماس، واستعمل الزاوية القائمة ومجموع زوايا المثلث.
- **الإجابة:** (ب) $33°$
- **خطوات الحل:**

1. المماس عمودي على نصف القطر: $m\angle abc = 90°$. $m\angle cab = 180 - (90 + 57) = 33°$

المستوى الإحداثي والأرباع

- نقرأ النقطة بالترتيب: السين ثم الصاد. إشارات الأرباع هي موجب وموجب، ثم سالب وموجب، ثم سالب وسالب، ثم موجب وسالب. الصفر يضع النقطة على محور فلا ننسبها إلى ربع.
- **مثال:** إذا كان $x > 2$، فأين تقع النقطة

$$(x - 2,\ 2 - x)$$

- **طريقة التعامل:** استخدم شرط المتغير لتحديد إشارة كل إحداثي منفصلًا، ثم اختر الربع الموافق للإشارتين.
- **الإجابة:** (د) الربع الرابع
- **خطوات الحل:**

1. لأي $x > 2$ الإحداثي السيني $x - 2$ موجب والصادي $2 - x$ سالب، فالنقطة في الربع الرابع.

الهندسة الإحداثية: المسافة والمنتصف والميل

- المسافة بين نقطتين هي الجذر التربيعي لمجموع مربعَي فرقَي الإحداثيات. منتصف القطعة يأخذ متوسط السينين ومتوسط الصادين. الميل فرق الصادات على فرق السينات؛ والعمودي ميله غير معرف.
- **مثال:** إذا كانت النقطة $(4, 3)$ تقع في منتصف المسافة بين النقطتين $(5, z)$ و $(x, 0)$، فإن قيمة $x + z$ تساوي
- **طريقة التعامل:** ساوِ كل إحداثي للمنتصف بمتوسط الإحداثيين المقابلين، واستخرج المجهولين من علاقتين مستقلتين.
- **الإجابة:** (أ) 9

- **خطوات الحل:**

1. $\frac{5+x}{2} = 4 \Rightarrow x = 3$، و 2. $\frac{z+0}{2} = 3 \Rightarrow z = 6$ 3. $x + z = 9$

المسافة إلى مستقيم

- المسافة من نقطة إلى مستقيم هي أقصر مسافة، وتقاس عمودياً عليه. بعد كتابة المستقيم على الصورة العامة نعوض إحداثيي النقطة، ونأخذ القيمة المطلقة للبسط، ثم نقسم على جذر مجموع مربعَي معاملي السين والصاد.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- **مثال:** ما المسافة بين النقطة $(2, 0)$ والمستقيم

$$y = -x$$

- **طريقة التعامل:** اكتب معادلة المستقيم في طرف واحد، ثم طبق قانون المسافة بإحداثيي النقطة، لا تستخدم الفرق الرأسي وحده.
- **الإجابة:** (ج) $\sqrt{2}$
- **خطوات الحل:**

1. المستقيم بالصورة العامة: $x + y = 0$ 2. $d = \frac{|2+0|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

معادلة المستقيم

- معادلة المستقيم من ميل ونقطة تربط فرق الصادات بفرق السينات. المتوازيان لهما الميل نفسه، والمتعامدان غير الرأسيين حاصل ضرب ميليهما سالب واحد. المستقيم الرأسي معادلته تثبت السين، والأفقي تثبت الصاد.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- **مثال:** ما معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم $-2x + y = -4$ ويمر بالنقطة

$$(5, 3)$$

- **طريقة التعامل:** استخرج ميل المستقيم المعطى، واستعمله نفسه للموازي، ثم عوض بالنقطة المطلوبة في صورة الميل والنقطة.
- **الإجابة:** (أ) $y = 2x - 7$
- **خطوات الحل:**

1. ميل المستقيم الموازي $2m = 2$. $y - 3 = 2(x - 5) \Rightarrow y = 2x - 7$

معادلة الدائرة

- الدائرة هي نقاط على بعد ثابت من المركز. في صورتها القياسية يظهر المركز من داخل القوسين بعكس الإشارة، ومربع نصف القطر في الطرف الآخر. في الصورة العامة نكمل المربع لتحديد المركز ونصف القطر.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

- **مثال:** مركز الدائرة التي معادلتها

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$$

- **طريقة التعامل:** اجمع حدود كل متغير وأكمل مربعه، ثم اقرأ المركز من الصورة القياسية؛ لا تأخذ معاملات الحدود الخطية بوصفها إحداثيات المركز.
- **الإجابة:** (أ) $(-2, 3)$
- **خطوات الحل:**

1. المركز يساوي $\left(\frac{-4}{2}, \frac{6}{2}\right) = (-2, 3)$

القطوع المخروطية: التعرّف على النوع

- نميز القطع من الحدود التربيعية بعد التبسيط: مربع واحد يشير إلى مكافئ، ومربعان بالمعامل والإشارة نفسيهما إلى دائرة، وبالإشارة نفسها مع اختلاف المعاملين إلى ناقص، وبإشارتين مختلفتين إلى زائد. يجب فحص الصورة النهائية؛ فقد تتحلل إلى مستقيمين أو نقطة.
- **مثال:** $x^2 = -9y$ تمثل معادلة
- **طريقة التعامل:** لاحظ عدد المتغيرات المربعة وعلاقة الحد الآخر بها، ثم قارنه بالصورة القياسية المناسبة.
- **الإجابة:** (ج) قطع مكافئ مفتوح إلى أسفل
- **خطوات الحل:**

1. تربيع على x فقط: قطع مكافئ.
2. التربيع على x يفتح رأسياً، ومعامل y سالب فيفتح لأسفل.

القطع المكافئ

- رأس المكافئ يقرأ مباشرة من الصورة التي يظهر فيها مربع فرق المدخل عن ثابت، أو بإكمال المربع. فتحته تحددها إشارة معامل المربع واتجاه المتغير غير المربع؛ والبؤرة والدليل متساويا البعد من الرأس على المحور.
- **مثال:** رأس القطع المكافئ الذي معادلته $y = 2(x-1)^2 - 1$ هو
- **طريقة التعامل:** اقرأ ثابت الإزاحة الأفقية بعكس إشارته داخل القوس، ثم ثابت الإزاحة الرأسية بإشارته كما هو.
- **الإجابة:** (د) $(1, -1)$
- **خطوات الحل:**

1. نرتّب: $y + 1 = 2(x-1)^2$، فـ $2h = 1,\ k = -1$. الرأس $(1, -1)$.

القطوع المتحلّلة

- ظهور فرق مربعين لا يضمن وجود قطع زائد غير متحلل. إذا أصبح الطرف الثابت صفرًا بعد إكمال المربع، فقد تمثل المعادلة مستقيمين؛ نفحص التحليل قبل تسمية الشكل.
- **مثال:** المعادلة $4x^2 - y^2 + 2y = 1$ تمثل
- **طريقة التعامل:** أكمل مربع المتغير ذي الحد الخطي، وانقل الثوابت، ثم حلل المقدار الناتج إلى عاملين لتحديد نوع التمثيل.
- **الإجابة:** (د) مستقيمين متقاطعين
- **خطوات الحل:**

1. إكمال المربع: $4x^2 = (y-1)^2$. $y - 1 = \pm 2x \Rightarrow y = \pm 2x + 1$: مستقيمان متقاطعان.

القطع الناقص

- في القطع الناقص مجموع بعدَي أي نقطة عليه عن البؤرتين ثابت ويساوي طول المحور الأكبر. في الصورة القياسية المقام الأكبر مربع نصف المحور الأكبر، وعلاقة البعد البؤري تطرح مربع الصغير من مربع الكبير.

- **مثال:** مجموع بعدي النقطة $(0, 4)$ عن بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ يساوي

- **طريقة التعامل:** حدد المقام الأكبر في المعادلة، ثم اربطه بطول المحور الأكبر، لا تحسب المسافتين إلى البؤرتين منفردتين.

- **الإجابة:** (ب) 8

- **خطوات الحل:**

1. المقام الأكبر $4 = a \Rightarrow a^2 = 216$. مجموع البعدين عن البؤرتين يساوي $2a = 8$

القطع الزائد

- في القطع الزائد الفرق المطلق بين البعدين عن البؤرتين ثابت. الحد الموجب يحدد اتجاه المحور العرضي، والمقامات تمثل مربعَي نصفَي المحورين. خطا التقارب يمران بالمركز، وميلهما يقرأ من نسبة طولي نصفَي المحورين بحسب الاتجاه.

- **مثال:** إذا كانت $y^2 - 49x^2 - 49 = 0$، أوجد معادلة خطي التقارب

- **طريقة التعامل:** رتب المعادلة واجعل الطرف الآخر واحدًا، ثم حدد اتجاه الحد الموجب واكتب خطي التقارب من المركز والنسبة المناسبة.

- **الإجابة:** (أ) $y = \pm 7x$

- **خطوات الحل:**

1. الصورة القياسية: $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{1} = 1$، فـ $2a = 7,\ b = 1$. خطا التقارب: $y = \pm 7x$

المتجهات: الطول والعمليات

- نجمع المتجهات ونطرحها مركبةً مركبة، ونضرب كل مركبة في العدد عند القياس. طول المتجه الجذر التربيعي لمجموع مربعات مركباته. تساوي متجهين يعني تساوي المركبات المتناظرة، وليس تساوي طولهما فقط.
- **مثال:** إذا كان $\bar{a} = (x, y)$ و $\bar{b} = (y, x)$ متجهين، و $3a - b = (0, -8)$، فإن قيمة المتجه $\bar{a}$ تساوي
- **طريقة التعامل:** عوض بالمركبات في العلاقة المعطاة، ثم ساوِ مركبتي الطرفين لتكوين نظام للمجهولين.
- **الإجابة:** (أ) $(-1, -3)$
- **خطوات الحل:**

1. $3a - b = (3x - y, 3y - x) = (0, -8)$؛ من الأولى $2y = 3x$. بالتعويض: $8x = -8 \Rightarrow x = -1,\ y = -3$، فـ $\bar{a} = (-1, -3)$

الضرب القياسي والزاوية بين متجهين

- الضرب القياسي مجموع حواصل ضرب المركبات المتناظرة. جيب تمام الزاوية يساوي هذا الناتج مقسومًا على حاصل ضرب طولي المتجهين غير الصفريين. التعامد يكافئ كون الضرب القياسي صفرًا.

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

- **مثال:** قياس الزاوية بين المتجهين $\langle -9, 0 \rangle$ و

$$\langle -1, -1 \rangle$$

- **طريقة التعامل:** احسب الضرب القياسي وطول كل متجه، ثم استخرج الزاوية من نسبة جيب التمام، مع مراجعة إشارتها.
- **الإجابة:** (ب) 45°
- **خطوات الحل:**

1. الضرب الداخلي يساوي 9، وضرب المقياسين يساوي $29\sqrt{2}$.

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

الضرب الاتجاهي في الفضاء

- الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء ينتج متجهًا عموديًا عليهما. إذا كان $u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ و $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ فإن مركبات $u \times v$ هي

$$u \times v = \langle u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1 \rangle$$

وتبديل ترتيب المتجهين يعكس الإشارة. طول الناتج يمثل مساحة متوازي الأضلاع الذي يبنيانه.

- **مثال:** إذا كانت $u = \langle 1, 0, 0 \rangle$ و $v = \langle 0, -1, 0 \rangle$، أوجد

$$u \times v$$

- **طريقة التعامل:** حافظ على ترتيب المتجهين، ثم احسب مركبات الضرب الاتجاهي أو استعمل اتجاه متجهي الوحدة وقاعدة اليد اليمنى.
- **الإجابة:** (ج) $\langle 0, 0, -1 \rangle$
- **خطوات الحل:**

1. بالمحدد: $u \times v = \langle 0, 0, -1 \rangle$

المستوى والمستقيمات في الفضاء

- معادلة المستوى العامة تحدد متجهًا عموديًا مركباته معاملات المتغيرات. المستقيمان المتخالفان في الفضاء لا يتقاطعان ولا يتوازيان ولا يقعان في مستوى واحد؛ أما عدم التقاطع في الرسم وحده فلا يكفي للحكم.
- **مثال:** ما المتجه العمودي على المستوى

$$2x + 4y - 6z = 12$$

- **طريقة التعامل:** اقرأ معاملات المتغيرات الثلاثة بوصفها مركبات متجه عمودي؛ وأي مضاعف غير صفري له يعطي الاتجاه العمودي نفسه.
- **الإجابة:** (ب) $\langle 1, 2, -3 \rangle$
- **خطوات الحل:**

1. متجه المعاملات $\langle 2, 4, -6 \rangle$، وبالقسمة على 2: $\langle 1, 2, -3 \rangle$

النسب المثلثية في المثلث القائم

- في المثلث القائم: الجيب هو المقابل على الوتر، وجيب التمام المجاور على الوتر، والظل المقابل على المجاور. القاطع مقلوب جيب التمام، وقاطع التمام مقلوب الجيب، وظل التمام مقلوب الظل. المقابل والمجاور يتحددان بالنسبة إلى الزاوية المختارة.
- **مثال:** باستعمال الشكل المقابل (مثلث قائم وتره 3 والضلع المجاور للزاوية θ طوله 1) أوجد

$$\sin\theta$$

- **طريقة التعامل:** الوتر والمجاور معطيان، استخرج المقابل بفيثاغورس ثم استخدم نسبة الجيب، دون الخلط بينه وبين جيب التمام.
- **الإجابة:** (ج) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
- **خطوات الحل:**

1. فيثاغورس: المقابل يساوي $2\sqrt{2}$ .2 $\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ $2\sqrt{9-1}$

الراديان والقطاع الدائري

- الراديان يقيس الزاوية بنسبة طول القوس إلى نصف القطر، والدورة الكاملة تساوي اثنين باي راديان أو ثلاثمئة وستين درجة. طول القوس يساوي نصف القطر مضروبًا في الزاوية بالراديان، ومساحة القطاع نصف مربع نصف القطر مضروبًا فيها.

$$s = r\theta$$

- **مثال:** في الشكل التالي، إذا كان طول القوس $\dfrac{2\pi}{9}$ ونصف قطر الدائرة 2، أوجد قياس الزاوية المركزية a بالدرجات
- **طريقة التعامل:** اقسم طول القوس على نصف القطر لتحديد الزاوية بالراديان، ثم حوّلها إلى الدرجات إذا طلبها السؤال.

- **الإجابة:** (أ) 20
- **خطوات الحل:**

1. $s = r\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{2\pi/9}{2} = \dfrac{\pi}{9}$ راديان.
2. بالدرجات: $\dfrac{\pi}{9} \times \dfrac{180}{\pi} = 20^\circ$

الدائرة المثلثية وإشارات الأرباع

- في دائرة الوحدة يمثل جيب التمام الإحداثي الأفقي والجيب الرأسي، والظل نسبتهما. نحدد الربع من المجال والإشارات قبل اختيار إشارة الجذر عند استخراج نسبة مثلثية مجهولة.
- **مثال:** إذا كانت $\sin\theta = -\dfrac{3}{5}$ حيث $0 \le \theta \le 270^\circ$، ما قيمة

$$\sec\theta$$

- **طريقة التعامل:** حدد الربع المسموح الذي يوافق إشارة الجيب، ثم استخرج جيب التمام بإشارته الصحيحة قبل أخذ مقلوبه.
- **الإجابة:** (ب) $-\dfrac{5}{4}$
- **خطوات الحل:**

1. $\cos^2\theta = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$، والزاوية بالربع الثالث فـ $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$.
$\sec\theta = -\dfrac{5}{4}$

المتطابقات المثلثية

- المتطابقة الأساسية تقول: مجموع مربعَي الجيب وجيب التمام واحد. الظل يساوي الجيب على جيب التمام، والمقلوبات تعيد القاطع وقاطع التمام وظل التمام. يمكن تحليل فرق المربعين أو استعمال ضعف الزاوية قبل الاختصار.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

- **مثال:** بسّط

$$\frac{\cos x \cot x \sec^3 x}{\csc x}$$

- **طريقة التعامل:** اكتب الدوال المركبة باستعمال الجيب وجيب التمام، ثم اختصر العوامل المشتركة مع مراعاة مواضع التعريف.
- **الإجابة:** (ب) $\sec x$
- **خطوات الحل:**

1. بدلالة الجيب وجيب التمام: $\frac{1}{\sin x} \div \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^3 x} \cdot 2\cos x$. يُختصر إلى $\frac{1}{\cos x} = \sec x$

السعة والدورة ومدى الدوال المثلثية

- في الدالة المثلثية يحدد معامل الجيب أو جيب التمام السعة بقيمته المطلقة، والثابت الخارجي يزيح المدى. الدورة للدالتين تساوي اثنين باي على القيمة المطلقة لمعامل المدخل، وللظل باي على ذلك المعامل.

- **مثال:** مدى الدالة

$$f(x) = 2\cos(3x + 2)$$

- **طريقة التعامل:** ابدأ بمدى جيب التمام الأساسي، ثم طبق أثر المعامل الخارجي؛ لا تجعل معامل المدخل عاملًا يغير قيم المدى.
- **الإجابة:** (أ) $[-2, 2]$
- **خطوات الحل:**

1. بما أن $-1 \le \cos(3x + 2) \le 1$، فبالضرب في 2 المدى $[-2, 2]$

الأشجار في الرسوم البيانية

- في الرسوم البيانية الشجرة رسم متصل لا يحتوي دورة، وعدد حوافه أقل من عدد رؤوسه بواحد. هذا استخدام لكلمة «شجرة» في نظرية الرسوم، وليس المقصود به الشكل النباتي أو مجرد أي رسم متفرع.
- **مثال:** شجرة بها n من الرؤوس، فكم عدد أضلاعها؟
- **طريقة التعامل:** تحقق أن الرسم شجرة، ثم استعمل العلاقة بين عدد الرؤوس والحواف دون الحاجة إلى عدّ مسارات إضافية.
- **الإجابة:** (ب) $n - 1$
- **خطوات الحل:**

1. الشجرة متصلة بلا دورات، وكل رأس جديد يضيف ضلعاً واحداً: عدد الأضلاع يساوي $n - 1$

التحويلات الهندسية

- الانسحاب يضيف مقدارًا إلى الإحداثي المناسب، والانعكاس حول السينات يغير إشارة الصاد وحول الصادات يغير إشارة السين. الانعكاس حول $y = x$ يبادل الإحداثيين. الانعكاس حول نقطة الأصل يغير إشارتي الإحداثيين معًا $(x, y) \to (-x, -y)$، وهو نفسه الدوران بزاوية $180°$ حول الأصل. الدوران يعتمد المركز والزاوية والاتجاه، فحول الأصل عكس عقارب الساعة: بزاوية $90°$ تصبح $(x, y) \to (-y, x)$، وبزاوية $270°$ تصبح $(x, y) \to (y, -x)$. وتركيب التحويلات ينفذ بالترتيب المذكور.
- التمدد بمعامل k حول نقطة الأصل يُعطي $(x, y) \to (kx, ky)$؛ إذا كان $|k| > 1$ كبّر الشكل، وإذا كان $|k| < 1$ صغّره، والمعامل السالب يعكس الاتجاه إضافة إلى التكبير أو التصغير.
- **مثال:** أجرينا انسحاباً للنقطة $(2, -1)$ إلى اليسار بمقدار أربع وحدات ثم انسحاباً إلى أعلى بمقدار ثلاث وحدات
- **طريقة التعامل:** طبّق الانتقال الأفقي على السين، ثم الرأسي على الصاد، مع تثبيت الإحداثي الآخر في كل خطوة.
- **الإجابة:** (ب) $(-2, 2)$
- **خطوات الحل:**

1. انسحاب يسارًا يطرح من x، وأعلى يجمع على y: $(2 - 4, -1 + 3) = (-2, 2)$

القطع المكافئ: المعادلة من الرأس والاتجاه

- معادلة القطع المكافئ تُبنى من رأسه واتجاه فتحته: إذا كانت الفتحة أفقية (يمينًا أو يسارًا) يكون التربيع على y، وإذا كانت رأسية (أعلى أو أسفل) يكون التربيع على x. إشارة الطرف الآخر تحدد جهة الفتحة: موجبة لليمين أو الأعلى، وسالبة لليسار أو الأسفل.
- **مثال:** معادلة القطع المكافئ الموضح بالرسم (رأسه $(-1, 1)$ وفتحته لليمين)

- أ) $(y-1)^2 = 3(x+1)$
- ب) $(y-1)^2 = -3(x+1)$
- ج) $(x+1)^2 = 3(y-1)$
- د) $(x+1)^2 = -3(y-1)$
- **طريقة التعامل:** حدد اتجاه الفتحة أولًا لتعرف أي متغير يُربّع، ثم اقرأ إشارة الطرف الآخر من جهة الفتحة.
- **الإجابة:** (أ) $(y-1)^2 = 3(x+1)$
- **خطوات الحل:**

1. الفتحة أفقية فالتربيع على y، وفتحتها لليمين فمعاملها موجب: $24p = 3 > 0$. بالرأس $(-1, 1)$: $(y-1)^2 = 3(x+1)$

خطوط متوازية ومتعامدة

- نقارن ميلي مستقيمين بعد كتابة كل معادلة بصيغة الميل والمقطع. إذا تساوى الميلان فالمستقيمان متوازيان، وإذا كان حاصل ضربهما سالب واحد فهما متعامدان.
- **مثال:** إذا كان $3y + x = 5$ و $y - 3x = 6$ فإن المستقيمين
- أ) متوازيان
- ب) متعامدان
- ج) متخالفان
- د) متطابقان
- **طريقة التعامل:** اكتب كل معادلة بصيغة الميل والمقطع، ثم اضرب الميلين؛ النتيجة سالب واحد تعني التعامد.
- **الإجابة:** (ب) متعامدان

- **خطوات الحل:**

1. ميل المستقيم الأول $m_1 = -\frac{1}{3}$، وميل الثاني $2m_2 = 3$. حاصل الضرب $3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$، إذن متعامدان.

المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف

- المسافة بين نقطتين هي جذر مجموع مربعي فرقي الإحداثيين، ونقطة المنتصف متوسط إحداثيي الطرفين. إذا عُرف أحد الطرفين ونقطة المنتصف، نعزل الطرف المجهول من كل إحداثي على حدة بعلاقتين منفصلتين.
- **مثال:** إذا كانت $p = (1, -2)$ تقع في منتصف القطعة المستقيمة AB وكانت $A = (-3, 4)$، فما إحداثيات النقطة B؟
- أ) $(-1, 1)$
- ب) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- ج) $(3, -4)$
- د) $(5, -8)$
- **طريقة التعامل:** طبّق قانون نقطة المنتصف على كل إحداثي منفصلًا، واعزل إحداثيي الطرف المجهول.
- **الإجابة:** (د) $(5, -8)$
- **خطوات الحل:**

1. من الإحداثي السيني: $-3 + x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 5$. من الإحداثي الصادي: $4 + y_2 = -4 \Rightarrow y_2 = -8$، إذن $B = (5, -8)$

المستقيمات المتخالفة في الفضاء

- المستقيمان المتخالفان في الفضاء لا يتقاطعان ولا يتوازيان ولا يقعان في مستوى واحد. عدم تقاطعهما في الرسم وحده لا يكفي للحكم بالتخالف؛ يجب أيضًا استبعاد التوازي واشتراك المستوى.
- **مثال:** الشكل أدناه مرسوم في الفضاء الثلاثي (شكل يشبه المنزل: مثلث رأسه B وقاعدته CA، ومستطيل $CAKD$ ونقطة H مركزه)، أي قطعة مستقيمة تخالف $\overline{BC}$؟
- أ) $\overline{AC}$
- ب) $\overline{DH}$
- ج) $\overline{AK}$
- د) $\overline{BH}$
- **طريقة التعامل:** استبعد كل قطعة تلتقي $\overline{BC}$ أو تشاركها مستوى واحدًا، وما يتبقى هو المتخالفة.
- **الإجابة:** (ج) $\overline{AK}$
- **خطوات الحل:**

1. القطعتان $\overline{AC}$ و $\overline{BH}$ تلتقيان $\overline{BC}$، و $\overline{DH}$ تشاركها مستوى.
2. إذن المتخالفة هي $\overline{AK}$

الرباعي الدائري: تكامل الزوايا المتقابلة

- إذا رُسم رباعي داخل دائرة بحيث تقع رؤوسه الأربعة على محيطها (رباعي دائري)، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان ومجموعهما مئة وثمانون درجة. هذه خاصية مستقلة عن علاقة الزاوية المركزية بالمحيطية.
- **مثال:** في الشكل أدناه ما قيمة x (رباعي مرسوم داخل دائرة، والزاوية المقابلة لـ x تساوي $80°$)؟

- أ) 90
- ب) 95
- ج) 100
- د) 105
- **طريقة التعامل:** اجمع x مع الزاوية المقابلة لها واجعل مجموعهما مئة وثمانين درجة.
- **الإجابة:** (ج) 100
- **خطوات الحل:**

1. في الرباعي الدائري: $2x + 80 = 180$. إذن $x = 100$

عدد المجموعات الجزئية لمجموعة

- عدد المجموعات الجزئية لمجموعة عدد عناصرها n يساوي 2^n، شاملًا المجموعة الخالية والمجموعة نفسها. عند عدّ العناصر احذر أن تُعامل كل مجموعة داخلية (عنصر هو نفسه مجموعة) بوصفها عنصرًا واحدًا لا عدة عناصر.

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

- **مثال:** كم عدد المجموعات الجزئية للمجموعة $A = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$؟
- أ) 6
- ب) 8
- ج) 24
- د) 32
- **طريقة التعامل:** عدّ عناصر A أولًا؛ كل مجموعة داخلية عنصر واحد لا أكثر، ثم طبّق القانون.

- **الإجابة:** (ب) 8
- **خطوات الحل:**

1. عدد عناصر A هو 3 (كل مجموعة داخلية عنصر واحد).
2. عدد المجموعات الجزئية $2^3 = 8$

المعيار الرابع: القياس

المحيط والمساحة والحجم

- المحيط مجموع أطوال الحدود، والمساحة قياس السطح الداخلي، والحجم قياس الحيز. محيط المربع أربعة أمثال ضلعه ومساحته مربع الضلع؛ ومحيط المستطيل ضعف مجموع الطول والعرض ومساحته حاصل ضربهما. ومحيط المثلث متطابق الأضلاع ثلاثة أمثال ضلعه. لا نستبدل معلومة المحيط بالمساحة مباشرة.
- **مثال:** مربع محيطه يساوي محيط مثلث متطابق الأضلاع طول ضلع المثلث 4 سنتيمتر، أوجد مساحة المربع
- **طريقة التعامل:** استخرج محيط المثلث من ضلعه، وساوِه بمحيط المربع لتحديد الضلع المطلوب قبل استعمال قانون المساحة.
- **الإجابة:** (ج) 9
- **خطوات الحل:**

1. محيط المثلث $3 \times 4 = 12$، فضلع المربع $212/4 = 3$. مساحة المربع $3 \times 3 = 9$

مساحة المثلث

- مساحة المثلث نصف حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع العمودي عليها. إذا غاب أحد أضلاع القائم نستخرجه بفيثاغورس. عند معرفة ضلعين وزاويتهما المحصورة يمكن استعمال نصف حاصل ضرب الضلعين في جيب الزاوية.
- **مثال:** مساحة المثلث في الشكل المجاور (ساقاه 5 و 5 وقاعدته 8)
- **طريقة التعامل:** ارسم الارتفاع من رأس المثلث المتطابق الساقين؛ فهو ينصف القاعدة، ثم استخرج الارتفاع بفيثاغورس وطبق قانون المساحة.
- **الإجابة:** (ب) 12
- **خطوات الحل:**

1. الارتفاع بفيثاغورس: $2\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. المساحة $\frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$

مساحات الأشكال المستوية

- مساحة متوازي الأضلاع القاعدة في الارتفاع، وشبه المنحرف نصف مجموع القاعدتين في الارتفاع، والمعين نصف حاصل ضرب قطريه. مساحة الدائرة باي في مربع نصف قطرها. في الشكل المركب نجمع مساحات الأجزاء غير المتداخلة أو نطرح الجزء المنزوع.
- **مثال:** ما مساحة الشكل المجاور بالسنتيمتر المربع؟ (مربع ضلعه 6 يعلوه مثلث قاعدته 5 وارتفاعه 4)
- **طريقة التعامل:** قسّم الشكل إلى مربع ومثلث، واحسب كل مساحة بالقانون المناسب ثم اجمعهما؛ لا تستخدم ضلع المربع ارتفاعًا للمثلث ما لم يُعطَ ذلك.
- **الإجابة:** (ب) 46
- **خطوات الحل:**

1. مساحة المربع $6 \times 6 = 36$، ومساحة المثلث $\frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$. مجموعهما $36 + 10 = 46$

المساحة الجانبية والكلية

- المساحة الجانبية تستبعد القواعد، والكلية تضيفها بحسب كون الجسم مغلقًا. جانبية المنشور القائم محيط القاعدة في الارتفاع، وجانبية الأسطوانة محيط دائرتها في الارتفاع. جانبية الهرم المنتظم نصف محيط القاعدة في ارتفاعه الجانبي.
- **مثال:** أسطوانة نصف قطرها 2 cm، وارتفاعها 3 cm، فإن مساحتها الجانبية تساوي
- **طريقة التعامل:** المطلوب الجانبية فقط، اربط محيط الدائرة بارتفاع الأسطوانة ولا تضف دائرتي القاعدتين.
- **الإجابة:** (د) 12π
- **خطوات الحل:**

1. $2\pi rh = 2\pi \times 2 \times 3 = 12\pi$

المجوم

- حجم المنشور والأسطوانة مساحة القاعدة في الارتفاع، وحجم الهرم والمخروط ثلث ذلك. حجم الكرة أربعة أثلاث باي في مكعب نصف القطر، ومساحة سطحها أربعة باي في مربع نصف القطر. نصف الكرة نصف حجمها. وفي المخروط الناقص يمكن طرح حجم الصغير من الكبير بعد إيجاد الأبعاد بالتشابه.
- **مثال:** مخروط دائري قائم، حجمه 108π سم^3، إذا كان قطر قاعدته 18 سم، فما هو ارتفاعه؟
- **طريقة التعامل:** حوّل القطر إلى نصف قطر، ثم استعمل علاقة حجم المخروط بقاعدته وارتفاعه لإيجاد الارتفاع المجهول.
- **الإجابة:** (أ) 4 سم
- **خطوات الحل:**

1. نصف القطر $r = 9$، نعوّض: $2108\pi = 27\pi h$. $h = 4$ سم.

تحويل الوحدات

- في الأطوال يستعمل عامل التحويل مرة، وفي المساحات مربعه، وفي الحجوم مكعبه. اللتر ألف سنتيمتر مكعب، والمتر المكعب ألف لتر. نكتب وحدة النتيجة للتأكد من نوع الكمية، وعدد الأصفار لا ينقل آليًا من الطول إلى الحجم.
- **مثال:** حوض ماء به 1.5 متر مكعب، كم يساوي بالسنتيمتر المكعب؟
- **طريقة التعامل:** حدد عامل تحويل المتر إلى السنتيمتر، ثم ارفعه للقوة الثالثة لأن المطلوب حجم، وطبقه على المقدار المعطى.
- **الإجابة:** (د) 1500000
- **خطوات الحل:**

1. نضرب في معامل التحويل: $1.5 \times 1000000 = 1500000$ سم^3.

وحدات القياس الأخرى

- الدرجات والراديان وحدتان للزاوية. للتحويل من الراديان إلى الدرجات نضرب في مئة وثمانين مقسومة على باي، وللعكس نضرب في باي مقسومة على مئة وثمانين. قراءة أي وحدة تسبق التعويض في قانون يعتمد عليها.
- من التحويلات الشائعة الأخرى: $1\text{ L} = 1000\text{ mL}$، $1\text{ kg} = 1000\text{ g}$، الطن = 2000 رطل = 32000 أوقية (النظام الأمريكي). لتحويل درجة الحرارة من الفهرنهايت إلى الكلفن: $K = (F - 32) \times \frac{5}{9} + 273$. ولتحويل درجة عشرية إلى درجات/دقائق/ثواني: نأخذ الجزء الصحيح درجات، ثم نضرب الجزء العشري في 60 فنحصل على الدقائق (جزؤها الصحيح)، ونكرر العملية على باقيها العشري للحصول على الثواني. و1 ميل $= 5280$ قدمًا.
- **مثال:** 1 راديان يساوي تقريباً
- **طريقة التعامل:** استخدم علاقة نصف الدورة بين الوحدتين لتقدير درجة الراديان الواحد، ثم قارن التقدير بالخيارات.

- **الإجابة:** (ج) $57°$
- **خطوات الحل:**

1. $1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \approx 57.3°$

مقياس الرسم

- مقياس الرسم نسبة طول الرسم إلى الطول الحقيقي بعد توحيد وحدتيهما. في النسبة واحد إلى عدد، يساوي الحقيقي طول الرسم مضروبًا في ذلك العدد، ولإيجاد الرسم نقسم الحقيقي عليه.
- **مثال:** خريطة كل 30 سم تعادل 120 كلم، فكم يكون مقياس الرسم؟
- **طريقة التعامل:** حوّل المسافة الحقيقية إلى وحدة طول الرسم، ثم بسّط نسبة الرسم إلى الحقيقي؛ لا تعكس ترتيب النسبة.
- **الإجابة:** (د) $1 : 400000$
- **خطوات الحل:**

1. المسافة الحقيقية 120 كم، أي 12000000 سم.
2. مقياس الرسم $\frac{30}{12000000} = \frac{1}{400000}$

أثر تغيير الأبعاد

- عند ضرب كل طول في عامل، تتغير المحيطات بالعامل نفسه، والمساحات بمربعه، والحجوم بمكعبه. هذا الحكم يتطلب تغيير الأبعاد المتناظرة جميعًا؛ فإذا تغير بعد واحد فقط نعود إلى القانون الأصلي.
- **مثال:** عند مضاعفة نصف قطر دائرة، فإن مساحتها الجديدة تصبح

- **طريقة التعامل:** لاحظ أن نصف القطر دخل في قانون المساحة مربعًا؛ لذلك طبّق أثر التغيير على المربع، لا على المساحة خطيًا.
- **الإجابة:** (ج) أربعة أمثال مساحتها السابقة
- **خطوات الحل:**

1. المساحة الجديدة $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$، أي أربعة أمثال المساحة الأصلية.

مساحة المنطقة المظللة

- مساحة المظلل تعتمد على حدوده الفعلية. نحدد الشكل الكبير والأجزاء المستبعدة، ونربط أطوالها من المعطيات؛ أحيانًا يساوي قطر المربع قطر الدائرة المحيطة، لا ضلع المربع.
- **مثال:** أوجد مساحة الجزء المظلل بالسنتيمتر المربع (دائرة نصف قطرها 7 cm محاطة بمربع، و $\pi = \frac{22}{7}$)
- **طريقة التعامل:** اربط ضلع المربع بقطر الدائرة المحاطة به، ثم اطرح مساحة الدائرة من مساحة المربع.
- **الإجابة:** (د) 42
- **خطوات الحل:**

1. مساحة المربع $14 \times 14 = 196$، ومساحة الدائرة $2\frac{22}{7} \times 7^2 = 154$. المساحة المظللة $196 - 154 = 42$

تطبيقات المحيط والمسارات

- مسافة دوران عجلة دون انزلاق تساوي محيطها مضروبًا في عدد الدورات. طول مسار أو شريط حول جسم يحسب من الأجزاء التي يمر بها فعلًا، ولا نضيف أقطارًا أو حواف لا يدخلها المسار.
- **مثال:** إذا كان طول نصف قطر عجلة شاحنة $50\ \text{cm}$ ودارت إطاراتها 200 دورة، فكم تكون المسافة التي قطعتها الشاحنة بالأمتار تقريباً؟
- **طريقة التعامل:** احسب المسافة في دورة من نصف القطر، واربطها بعدد الدورات، ثم حوّل وحدة الطول إلى الوحدة المطلوبة.
- **الإجابة:** (ب) 628
- **خطوات الحل:**

1. محيط العجلة $2\pi r = 314$ سم، لـ200 دورة: $314 \times 200 = 62800$ سم.
2. بالتحويل للمتر: 628 م.

السرعة والمسافة والزمن

- السرعة المسافة على الزمن، والزمن المسافة على السرعة، والمسافة السرعة في الزمن. قبل التعويض نوحد الوحدات. إذا تغيرت السرعة نوجد السرعة الجديدة أولًا، ولا نحافظ على الزمن القديم تلقائيًا.
- **مثال:** سيارة تقطع $600\ \text{km}$ خلال 5 ساعات، زادت سرعتها بمقدار $30\ \text{km/h}$، كم تستغرق لتقطع

$$375\ \text{km}$$

- **طريقة التعامل:** استخرج سرعة السيارة الأصلية من الرحلة الأولى، وأضف الزيادة المذكورة ثم اربط المسافة الجديدة بالزمن المطلوب.

- **الإجابة:** (ب) ساعتان ونصف
- **خطوات الحل:**

1. السرعة الأصلية $600/5 = 120$، بعد الزيادة 150 كم/س.
2. الزمن $375/150 = 2.5$ ساعة.

علاقات عددية تتكرّر في أسئلة القياس

- بعض المسائل تساوي بين القيم العددية لكميتين مختلفتي الوحدة. نكتب قانون كل كمية ونطبق العلاقة العددية المعطاة، مع إبقاء الوحدات في تفسير النتيجة. لا نستنتج من كبر المحيط عددًا حكمًا مباشرًا على المساحة.
- **مثال:** إذا كانت القيمة العددية لمساحة دائرة 5 أضعاف القيمة العددية لمحيطها، فإن نصف قطر الدائرة يساوي
- **طريقة التعامل:** اكتب المساحة والمحيط بدلالة نصف القطر، ثم ترجم علاقة «خمسة أضعاف» إلى مساواة وابحث عن العامل المشترك.
- **الإجابة:** (ب) 10
- **خطوات الحل:**

1. نكوّن المعادلة $2\pi r^2 = 5(2\pi r)$. بالقسمة على πr: $r = 10$

محيط ومساحة الأشكال الرباعية

- محيط المستطيل ضعف مجموع طوله وعرضه، ومساحته حاصل ضربهما. قد تُعطى المساحة أو المحيط بدلالة متغير، فتُبنى معادلة من القانون المناسب وتُحل لإيجاد البعد المجهول، ثم يُستعمل الناتج لحساب المطلوب الفعلي إن كان كمية أخرى غير المتغير نفسه.
- **مثال:** مستطيل مساحته 66 وعرضه 6 وطوله $2n + 1$، كم محيطه؟

- **طريقة التعامل:** أوجد البعد المجهول من قانون المساحة أولًا، ثم استخدمه في قانون المحيط، لا يكفي إيجاد قيمة المتغير فالمطلوب كمية أخرى.
- **الإجابة:** (ج) 34
- **خطوات الحل:**

1. من قانون المساحة: $(2n+1) \times 6 = 66 \Rightarrow$ الطول يساوي 11. المحيط: $2(11+6) = 34$

المثلثات ونظرية فيثاغورس

- في المثلث القائم، مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمين. نستعمل هذه العلاقة لإيجاد ضلع مجهول في مثلث قائم، أو داخل شكل مركّب يكون أحد أضلاعه وتر مثلث قائم ضمنه.
- **مثال:** في الشكل أدناه ما مساحة المربع $abdc$ بالسنتيمتر المربع؟ (مثلث قائم ضلعاه 4 cm و 3 cm ووتره ضلع المربع)
- **طريقة التعامل:** الوتر هو ضلع المربع، أوجده بفيثاغورس أولًا، ثم اضربه في نفسه لإيجاد المساحة لا الطول فقط.
- **الإجابة:** (ج) 25
- **خطوات الحل:**

1. بفيثاغورس: $2ad = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. مساحة المربع: $5 \times 5 = 25$

المعيّن: زواياه ومساحته ومحيطه

- قطرا المعيّن يتعامدان وينصّف كل منهما الآخر، فيتكوّن من نصفيهما مثلث قائم الزاوية نستخرج منه ضلع المعيّن بفيثاغورس: مربع الوتر (الضلع) يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمين (نصفي القطرين). مساحة المعيّن نصف حاصل ضرب قطريه، ومحيطه أربعة أمثال ضلعه.
- **مثال:** وُضع سياج حول حديقة على شكل معيّن طولا قطريه 16 و 12 متراً، فكم طول السياج بالمتر؟
- **طريقة التعامل:** خذ نصفي القطرين ضلعين لمثلث قائم، أوجد ضلع المعيّن بفيثاغورس، ثم اضربه في أربعة لأن طول السياج هو المحيط.
- **الإجابة:** (ج) 40
- **خطوات الحل:**

1. نصفا القطرين 8, 6؛ بفيثاغورس ضلع المعيّن يساوي 210. طول السياج (المحيط): $4 \times 10 = 40$

الدائرة: المحيط والمساحة والقطاعات

- محيط الدائرة ضعف باي في نصف القطر، ومساحتها باي في مربع نصف القطر. إذا أُعطي أحدهما نستخرج نصف القطر منه أولًا قبل حساب المطلوب الآخر. مساحة القطاع الدائري تتناسب مع زاويته من أصل الدائرة الكاملة (360 درجة). ومساحة القطعة الدائرية (المحصورة بين وتر وقوسه) تساوي مساحة القطاع ناقص مساحة المثلث المكوَّن من الوتر ونصفي القطرين: $\frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$ والزاوية المركزية θ بالراديان. لذا في أسطوانة موضوعة أفقيًا ومملوءة جزئيًا لا يتناسب حجم السائل مع ارتفاعه؛ بل حجمه مساحة المقطع الدائري المغمور (الدائرة ناقص القطعة الفارغة أو القطعة نفسها) مضروبة في طول الأسطوانة.
- **مثال:** دائرة محيطها 12π، كم مساحتها؟

- **طريقة التعامل:** استخرج نصف القطر من قانون المحيط أولًا، ثم عوّض به في قانون المساحة، لا تخلط بين القانونين.
- **الإجابة:** (ج) 36π
- **خطوات الحل:**

1. من المحيط: $22\pi r = 12\pi \Rightarrow r = 6$. المساحة: $\pi r^2 = 36\pi$

زوايا المضلعات وطول القوس

- مجموع الزوايا الداخلية لمضلع محدّب عدد أضلاعه n يساوي $(n-2) \times 180^\circ$، ومنها نستخرج عدد الأضلاع إذا عُرف المجموع. وطول القوس الدائري يساوي نصف القطر مضروبًا في الزاوية المركزية بالراديان، احرص على توحيد الوحدة بين الطول ونصف القطر قبل التعويض.
- **مثال:** مضلع مجموع زواياه الداخلية 1080، أوجد عدد أضلاعه
- **طريقة التعامل:** اعكس قانون مجموع الزوايا بالقسمة على 180 ثم أضف اثنين.
- **الإجابة:** (ج) 8
- **خطوات الحل:**

1. $2(n-2)(180) = 1080 \Rightarrow n - 2 = 6$. إذن $n = 8$

- **مثال:** في الشكل المقابل طول القوس $\frac{2\pi}{9}$ و $AB = 2$، أوجد قياس الزاوية x
- **طريقة التعامل:** أوجد الزاوية المركزية بالراديان من قانون طول القوس، حوّلها إلى درجات، ثم استعمل تطابق نصفي القطرين لإيجاد زاوية القاعدة.
- **الإجابة:** (ج) 80°
- **خطوات الحل:**

1. من قانون طول القوس: $2\theta = \dfrac{2\pi/9}{2} = \dfrac{\pi}{9} = 20^\circ$. بتطابق نصفي القطرين:

$$x = \frac{180 - 20}{2} = 80^\circ$$

المعيار الخامس: الإحصاء والاحتمالات

مقاييس النزعة المركزية

- المتوسط مجموع القيم مقسومًا على عددها، والوسيط القيمة الوسطى بعد الترتيب، والمنوال الأكثر تكرارًا. إذا كان عدد القيم زوجيًا فالوسيط متوسط القيمتين الوسطيتين.
- **مثال:** الوسيط للبيانات

$$19, 21, 15, 13, 17, 13, 23$$

- **طريقة التعامل:** رتب البيانات تصاعديًا وحدد موضع القيمة الوسطى، دون الخلط بينه وبين المتوسط.
- **الإجابة:** (ج) 17
- **خطوات الحل:**

1. نرتّب البيانات: $213, 13, 15, 17, 19, 21, 23$. عددها فردي، فالوسيط القيمة الرابعة، تساوي 17

المتوسط المركّب والمرجّح

- عند جمع مجموعات مختلفة الحجم نعمل بالمجاميع. مجموع قيم المجموعة يساوي متوسطها مضروبًا في عددها، والمتوسط الكلي مجموع القيم على مجموع الأعداد.
- **مثال:** متوسط 20 عدداً يساوي 20 ومتوسط 9 أعداد منهم يساوي 9، فما متوسط باقي الأعداد؟
- **طريقة التعامل:** استخرج مجموع المجموعة كلها ومجموع الجزء المعلوم، ثم اطرح وحدد عدد القيم الباقية قبل حساب متوسطها.
- **الإجابة:** (ب) 29
- **خطوات الحل:**

1. مجموع العشرين يساوي 400، ومجموع التسعة يساوي 81، فمجموع الباقي يساوي 2319. متوسط الـ11 الباقية $319/11 = 29$

أثر التغيير على المقاييس

- إضافة ثابت لجميع القيم تغير المتوسط والوسيط والمنوال بالمقدار نفسه، وتبقي الفروق والمدى والتشتت كما هي. أما ضرب جميع القيم في ثابت فيضرب المتوسط والوسيط والمنوال والمدى والانحراف المعياري في الثابت نفسه، بينما يُضرب التباين في مربع الثابت (لأنه مربع الانحراف المعياري).
- **مثال:** لدينا القيم $1, 2, 2, 3, 4$، أيٌّ مما يلي لا يتأثر إذا زادت كل قيمة بمقدار واحد؟
- أ) المتوسط
- ب) الوسيط
- ج) المنوال
- د) المدى

- **طريقة التعامل:** ميز مقاييس الموقع عن مقاييس التشتت، واسأل هل تغيرت الفروق بين القيم بعد إضافة الواحد.
- **الإجابة:** (د) المدى
- **خطوات الحل:**

1. المدى قبل $4 - 1 = 3$ وبعد الزيادة $5 - 2 = 3$، لم يتغيّر.
2. المتوسط والوسيط والمنوال زادوا جميعًا بمقدار 1

المتوسط في المتتابعات الحسابية

- إذا كانت القيم متتابعة حسابيًا (فروق متساوية بين المتتاليين)، فمتوسطها الحسابي يساوي نصف مجموع الحد الأول a_1 والحد الأخير a_n مباشرة، دون جمع كل الحدود وقسمتها على عددها.

$$\bar{x} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

- **مثال:** المتوسط الحسابي للأعداد $11, 12, 13, 14, 15, 16$ هو
- أ) 13.5
- ب) 14.5
- ج) 13
- د) 14
- **طريقة التعامل:** تحقّق أن الفروق بين الأعداد متساوية، ثم طبّق القاعدة المختصرة بدل جمع الأعداد كلها.
- **الإجابة:** (أ) 13.5
- **خطوات الحل:**

1. القاعدة المختصرة: $\frac{11+16}{2} = 13.5$

مقاييس التشتت

- المدى أكبر قيمة ناقص أصغر قيمة. التباين يقيس تشتت القيم حول المتوسط، والانحراف المعياري جذر التباين؛ لذلك التباين مربع الانحراف المعياري.

$$V = \sigma^2$$

- **مثال:** إذا كانت قيمة الانحراف المعياري لمجموعة من البيانات هي 4، فما هي قيمة التباين؟
- **طريقة التعامل:** استخدم العلاقة بين المقياسين وحدد أيهما المعطى وأيهما المطلوب.
- **الإجابة:** (ج) 16
- **خطوات الحل:**

1. التباين يساوي $4^2 = 16$

مبدأ العدّ الأساسي

- إذا تكون الاختيار من مراحل متتابعة نضرب أعداد البدائل في كل مرحلة. أما البدائل المنفصلة التي نختار واحدة منها فنجمع أعدادها، مع تجنب عد الاختيار نفسه مرتين.
- **مثال:** يقدّم مطعم أطباق 4 لحوم و 5 سلطات و 6 عصائر، كم عدد الأطباق الممكنة؟
- **طريقة التعامل:** حدد عدد الخيارات في كل صنف، ثم طبق مبدأ الضرب لأن الوجبة تتكون من اختيار من كل صنف.
- **الإجابة:** (د) 120
- **خطوات الحل:**

1. بمبدأ العد: $4 \times 5 \times 6 = 120$

التباديل

- التباديل عد ترتيبات يكون فيها ترتيب العناصر مهمًا. ترتيب جميع العناصر المختلفة يساوي مضروب عددها. إذا تكررت عناصر نقسم على مضروبات أعداد التكرار. وفي الترتيب الدائري (حول طاولة مستديرة) لا توجد بداية مميزة، فنثبّت عنصرًا ونرتب الباقي، فيكون عدد التباديل الدائرية لـ n من العناصر المختلفة $(n-1)!$

$$n! = n(n-1)\cdots 1$$

- **مثال:** عدد الطرق المختلفة لترتيب حروف كلمة (خالد) يساوي
- **طريقة التعامل:** عد الحروف وتحقق من اختلافها، ثم اختر قانون ترتيب جميع العناصر.
- **الإجابة:** (ج) 24
- **خطوات الحل:**

1. عدد الترتيبات $4! = 24$

التوافيق

- التوافيق تعد مجموعات الاختيار التي لا يهم فيها الترتيب. نختارها بدل التباديل إذا كان تبديل مواقع المختارين لا ينتج اختيارًا جديدًا.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- **مثال:** بكم طريقة يمكن اختيار طالبين من 5 طلاب لرحلة مدرسية؟
- **طريقة التعامل:** حدد عدد الطلاب الكلي وعدد المطلوب اختيارهم، ثم استعمل التوافيق لأن ترتيب الطالبين غير مهم.
- **الإجابة:** (ب) 10

- **خطوات الحل:**

1. توافيق لأن الترتيب غير مهم: $\binom{5}{2} = 10$

مفكوك ذات الحدين

- في مفكوك ذات الحدين، نجمع أسّي الجزأين إلى أس القوة الكلية. معامل الحد ينتج من التوفيقة ومن معامل الجزء الثابت مرفوعًا إلى أسه.

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- **مثال:** ما قيمة معامل x^4 في مفكوك

$$(x+3)^7$$

- **طريقة التعامل:** طابق أس المتغير المطلوب مع أسه في الحد العام، ثم حدد عوامل المعامل دون كتابة المفكوك كاملًا.
- **الإجابة:** (د) 945
- **خطوات الحل:**

1. الحد العام $\binom{7}{k} x^{7-k} 3^k$، شرط x^4: $2k = 3$. المعامل $\binom{7}{3} 3^3 = 945$

الاحتمال الأساسي

- عند تساوي فرص النتائج، الاحتمال عدد النتائج المطلوبة على عدد النتائج الممكنة. احتمال المتممة واحد ناقص احتمال الحادثة. في السحب المتتابع انتبه إلى الإعادة، لأنها تحدد هل يتغير العدد الكلي.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

- **مثال:** عند إلقاء حجر النرد مرة واحدة فقط، ما احتمال ظهور عدد زوجي على الوجه العلوي؟
- **طريقة التعامل:** اكتب نتائج حجر النرد الممكنة، وحدد منها النتائج الزوجية ثم قارن عددها بعدد النتائج كلها.
- **الإجابة:** (ب) $\frac{3}{6}$
- **خطوات الحل:**

1. فضاء العينة 6 نتائج، الزوجية $2, 4, 6$. الاحتمال $3/6$

الاحتمال في رمي حجري نرد

- عند رمي حجَري نرد معًا فضاء العينة $6 \times 6 = 36$ ناتجًا مرتبًا، لا 6 فقط. نعدّ الأزواج المرتبة التي تحقق الشرط (مع ملاحظة أن (a, b) تختلف عن (b, a) إن لم يتساويا) ونقسم على 36
- **مثال:** إذا أُلقي حجرا نرد، فما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين 9؟
- أ) $\frac{1}{6}$
- ب) $\frac{1}{4}$
- ج) $\frac{1}{9}$
- د) $\frac{1}{18}$

- **طريقة التعامل:** اكتب فضاء العينة كاملًا (36 ناتجًا)، ثم عدّ الأزواج المرتبة التي مجموعها الشرط المطلوب.
- **الإجابة:** (ج) $\frac{1}{9}$
- **خطوات الحل:**

1. فضاء العينة $26 \times 6 = 36$. أزواج مجموعها 9: أربعة أزواج، فالاحتمال $4/36 = 1/9$

الاحتمال بدون إرجاع

- إذا سُحب أكثر من عنصر معًا أو دون إعادة العنصر الأول، ينقص كل من البسط والمقام في السحبة التالية بمقدار ما سُحب، فتُضرب احتمالات متتالية غير متساوية المقام. وهذا بخلاف السحب مع الإرجاع، حيث يثبت المقام.
- **مثال:** صندوق به 9 كرات منها 4 زرقاء و 5 حمراء، سُحبت كرتان معاً فما احتمال أن تكونا زرقاوين؟
- أ) $\frac{1}{16}$
- ب) $\frac{2}{9}$
- ج) $\frac{1}{2}$
- د) $\frac{1}{6}$
- **طريقة التعامل:** اضرب احتمال الكرة الأولى في احتمال الثانية بعد إنقاص عدديها الكليين والمطلوبين بواحد.
- **الإجابة:** (د) $\frac{1}{6}$
- **خطوات الحل:**

1. بدون إرجاع، نضرب الاحتمالين: $\frac{3}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{6}$

اتحاد الحوادث وتقاطعها

- «أو» تشير إلى الاتحاد، و«و» إلى التقاطع. احتمال الاتحاد مجموع الاحتمالين ناقص احتمال التقاطع، وللحوادث المتنافية يكون التقاطع فارغًا. للحوادث المستقلة نضرب الاحتمالين لإيجاد التقاطع.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- **مثال:** صندوق يحتوي على 6 كرات حمراء و 6 زرقاء و 8 صفراء و 5 بيضاء، سُحبت منها كرة واحدة عشوائياً، ما احتمال أن تكون الكرة حمراء أو بيضاء؟
- **طريقة التعامل:** اجمع عددي اللونين المطلوبين، وحدد العدد الكلي لجميع الكرات؛ فالكرة الواحدة لا تجمع اللونين هنا.
- **الإجابة:** (ب) $\frac{11}{25}$
- **خطوات الحل:**

1. العدد الكلي 25، الحمراء أو البيضاء $11 = 5 + 26$. الاحتمال $11/25$

الاحتمال الهندسي

- إذا توزعت الإصابة بالتساوي على مساحة الهدف، فالاحتمال مساحة المنطقة المطلوبة على مساحة الهدف. المساحة تتغير بمربع نسبة الأطوال، فلا نستخدم نسبة القطر مباشرة بدل نسبة المساحة.
- **مثال:** في هدف دائري قطر الدائرة الكبرى يساوي ضعف قطر الدائرة الصغرى. إذا صوّب رجل سهمه إلى الهدف فإن احتمال أن يستقر السهم في الدائرة الصغرى يساوي
- **طريقة التعامل:** قارن نصفي القطر، ثم انتقل إلى نسبة المساحتين واستخدمها في الاحتمال.

- **الإجابة:** (أ) $\frac{1}{4}$
- **خطوات الحل:**

1. مساحة الصغرى $\pi d^2/4$، ومساحة الكبرى $2\pi d^2$. الاحتمال $\frac{1}{4}$

قراءة الجداول والرسوم

- اقرأ عنوان الرسم ووحداته والمجموع الكلي أولًا. في القطاعات تكون النسب مجموعها مئة بالمئة، وعدد أفراد الفئة يساوي نسبتها مضروبة في العدد الكلي. وبما أن القطاع الدائري الكامل $360°$، فزاوية كل فئة تساوي نسبتها مضروبة في $360°$ (نسبة الزاوية إلى الدائرة الكاملة تساوي نسبة الفئة إلى الكل).

- **مثال:** المعطيات التالية تمثل نتائج استبانة عن المادة الدراسية المفضلة أُجريت على 220 طالباً (رياضيات 30%، لغتي 15%، غير ذلك 35%، علوم: غير مذكورة). كم طالباً يفضلون مادة العلوم؟

- **طريقة التعامل:** استخرج النسبة المفقودة من النسب المعطاة، ثم اربطها بعدد الطلاب الكلي.

- **الإجابة:** (ج) 44

- **خطوات الحل:**

1. نسبة العلوم تساوي $100\% - (30 + 35 + 15) = 20\%$. عدد الطلاب $220 \times 0.20 = 44$

- **مثال:** إذا تم تمثيل 200 مريض في قطاع دائري، وكان 70 منهم فصيلة دمهم A^+، أوجد قياس الزاوية التي تمثل فصيلة الدم A^+

- أ) $35°$
- ب) $70°$
- ج) $126°$

- د) $145°$

- **طريقة التعامل:** نسبة الجزء إلى الكل تساوي نسبة الزاوية إلى $360°$، فطبّق التناسب مباشرة.
- **الإجابة:** (ج) $126°$
- **خطوات الحل:**

1. بالتناسب: $m\angle A^+ = \frac{70}{200} \times 360 = 126°$

العدّ المقيّد (قيود على بعض الخانات)

- إذا فُرض شرط على بعض خانات العدّ (مثل منع رقم معيّن في خانة أو اشتراط صفة في الناتج)، نحدد أولًا عدد الاحتمالات المسموحة في الخانة المقيّدة بهذا الشرط، ثم نحسب بقية الخانات الحرة بلا قيد، ونضرب الكل بمبدأ العدّ.
- **مثال:** كم عدد الأعداد الواقعة بين 100 و 1000 ولا تقبل القسمة على 10؟
- أ) 700
- ب) 729
- ج) 810
- د) 900

- **طريقة التعامل:** العدد يقبل القسمة على 10 إذا كان رقم آحاده صفرًا، فاستبعد الصفر من خانة الآحاد وحدها واحسب بقية الخانات بلا قيد إضافي.
- **الإجابة:** (ج) 810
- **خطوات الحل:**

1. خانة الآحاد تستبعد الصفر فقط: 9 احتمالات.
2. خانة العشرات 10 احتمالات، وخانة المئات 9 احتمالات (بلا صفر): $9 \times 10 \times 9 = 810$

التباديل مع العناصر المتكررة

- إذا تكرر بعض العناصر في الترتيب، فعدد التباديل المميزة يساوي مضروب العدد الكلي مقسومًا على حاصل ضرب مضروبات أعداد تكرار كل عنصر متماثل.

$$\frac{n!}{r_1!\, r_2! \cdots}$$

- **مثال:** بكم طريقة يمكن ترتيب 6 كراسٍ في صف واحد إذا عُلم أن 3 كراسٍ حمراء وكرسيَّين صفراء وواحداً أبيض؟
- أ) 60
- ب) 90
- ج) 120
- د) 720
- **طريقة التعامل:** الكراسي المتماثلة لا تُميَّز، فطبّق قانون التباديل مع التكرار واقسم على مضروب عدد كل لون.
- **الإجابة:** (أ) 60
- **خطوات الحل:**

1. نطبّق $\dfrac{n!}{r_1!\, r_2!\, r_3!} = \dfrac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = \dfrac{720}{12} = 60$

الحادثة المؤكدة والمستحيلة وقانون ديمورجان للمتممات

- احتمال الحادثة المؤكدة الوقوع يساوي واحدًا، واحتمال الحادثة المستحيلة يساوي صفرًا. ولإيجاد احتمال تقاطع متممتَي حادثتين نستخدم قانون ديمورجان: تقاطع المتممتين هو متممة اتحاد الحادثتين الأصليتين.

$$P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A \cup B)$$

- **مثال:** إذا كانت $P(A) = 0.4$ و $P(B) = 0.3$ و $P(A \cap B) = 0.1$، أوجد $P(A^C \cap B^C)$
- أ) 0.9
- ب) 0.6
- ج) 0.4
- د) 0.3
- **طريقة التعامل:** احسب احتمال الاتحاد أولًا بقانون الاتحاد المعتاد، ثم اطرحه من واحد بقانون ديمورجان.
- **الإجابة:** (ج) 0.4
- **خطوات الحل:**

1. احتمال الاتحاد: $P(A \cup B) = 0.4 + 0.3 - 0.1 = 0.6$ 2. بقانون ديمورجان: $P(A^C \cap B^C) = 1 - 0.6 = 0.4$

المعيار السادس: المنطق والاستدلال

التقرير الرياضي وقيم الصواب

- التقرير جملة خبرية يمكن الحكم عليها بالصواب أو الخطأ. الأمر والسؤال لا يعدان تقريرًا بهذا المعنى. لا تشترط صحة الجملة لتكون تقريرًا، بل إمكانية الحكم عليها.
- **مثال:** أي مما يأتي لا يُعدّ تقريراً؟
- أ) يا أحمد لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد
- ب) البرمائيات تعيش في اليابسة والماء
- ج) يوجد بالسنة 12 شهراً
- د) أحمد يمشي 20 كلم
- **طريقة التعامل:** افحص نوع كل عبارة: هل تخبر عن أمر يمكن التحقق منه أم تطلب فعلًا أو جوابًا؟
- **الإجابة:** (أ) يا أحمد لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد
- **خطوات الحل:**

1. التقرير جملة خبرية يُحكم عليها بالصواب أو الخطأ.
2. جملة النهي لا تحمل خبراً، فليست تقريراً؛ البقية تقارير.

أدوات الربط وجداول الصواب

- النفي يقلب قيمة الصواب. «و» تصدق إذا صدق الطرفان، و«أو» تصدق إذا صدق أحدهما على الأقل. الشرطية لا تكون خاطئة إلا إذا صدق الفرض وكذبت النتيجة، والتكافؤ يصدق عند تساوي القيمتين.
- **مثال:** متى تكون $\sim A \rightarrow \sim B$ خاطئة؟
- أ) A, B صائبتين
- ب) A, B خاطئتين
- ج) A صائبة و B خاطئة
- د) A خاطئة و B صائبة
- **طريقة التعامل:** حدد فرض الشرطية ونتيجتها، ثم طبق حالة خطئها وارجع من العبارتين المنفيتين إلى الأصل.
- **الإجابة:** (د) A خاطئة و B صائبة
- **خطوات الحل:**

1. $\sim A \rightarrow \sim B$ خاطئة إذا $A = T,\ \sim B = F$ أي $A = F,\ B = T$.2

العبارة الشرطية ومشتقّاتها

- في الشرطية نميز الفرض والنتيجة. العكس يبدل موضعيهما، والمعكوس ينفيهما، والمكافئ العكسي يجمع التبديل والنفي وهو مكافئ للأصل. نفي «أكبر من» هو «أصغر من أو يساوي».

$$(A \rightarrow B) \equiv (\neg B \rightarrow \neg A)$$

- **مثال:** يُعرَّف المكافئ العكسي للعبارة $A \rightarrow B$ بأنه $\sim B \rightarrow \sim A$. ما المكافئ العكسي للعبارة: "إذا كان $X > 5$ فإن $X > 3$"؟

- **طريقة التعامل:** بدل موضعي الفرض والنتيجة وانف كليهما، مع إبقاء المساواة في نفي المتباينة.
- **الإجابة:** (د) إذا كان $X \leq 3$ فإن $X \leq 5$
- **خطوات الحل:**

1. نفي النتيجة فرضاً: $X \leq 3$، ونفي الفرض نتيجة: $2X \leq 5$. المكافئ العكسي: إذا $X \leq 5$ فإن $X \leq 3$

الاقتضاء والتكافؤ

- الاقتضاء اتجاه واحد من عبارة إلى أخرى، والتكافؤ يتطلب صحة الاتجاهين. لإثبات أن عبارة تستلزم أخرى نبحث عن الحالات التي تحقق الأولى، ونتأكد من تحقق الثانية فيها كلها.
- **مثال:** أي من الخيارات التالية صحيحة؟
- أ) $x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$
- ب) $x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$
- ج) $x^2 = 64 \Leftrightarrow x = 8$
- د) لا شيء مما سبق
- **طريقة التعامل:** اختبر الاتجاه المذكور في كل خيار، وانتبه إلى أن تربيع عدد لا يحدد إشارته.
- **الإجابة:** (أ) $x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$
- **خطوات الحل:**

1. تربيع 5 يعطي 25 دائماً فالفقرة (أ) صحيحة.
2. بينما $\sqrt{25} = \pm 5$ و $\sqrt{64} = \pm 8$، فالباقي خاطئ.

قواعد الاستدلال

- في الاستدلال المتسلسل، إذا قادت العبارة الأولى إلى الثانية والثانية إلى الثالثة، فإن الأولى تقود إلى الثالثة. إثبات الفرض يسمح باستنتاج النتيجة، أما إثبات النتيجة وحده فلا يثبت الفرض.
- **مثال:** "إذا نجح محمد في اختباراته، فسيسافر مع زملائه" و"إذا سافر محمد مع زملائه، فسيذهب إلى أبها". حدّد أي العبارات الآتية تنتج منطقياً من العبارتين السابقتين
- أ) إذا سافر محمد، فإنه نجح في اختباراته
- ب) إذا ذهب محمد إلى أبها، فسيذهب مع زملائه
- ج) إذا نجح محمد في اختباراته، فسيذهب إلى أبها
- د) إذا ذهب محمد إلى أبها، فإنه نجح في اختباراته
- **طريقة التعامل:** حدد العبارة المشتركة بين الشرطيتين واربط بداية السلسلة بنهايتها مع المحافظة على الاتجاه.
- **الإجابة:** (ج) إذا نجح محمد في اختباراته، فسيذهب إلى أبها
- **خطوات الحل:**

1. بخاصية التعدّي: $(p \to q) \land (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$2. إذن: إذا نجح في اختباراته فسيذهب إلى أبها.

قوانين ديمورجان والنفي

- وفق ديمورجان، نفي «و» يصبح «أو» بين النفيين، ونفي «أو» يصبح «و» بين النفيين. يجب نفي كل طرف مع تغيير الرابط.

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

- **مثال:** العبارة $\sim (p \wedge q)$ تكافئ
- **طريقة التعامل:** طبق النفي على الطرفين وغيّر الرابط، ثم قارن الصيغة الناتجة بالخيارات.
- **الإجابة:** (ب) $\sim p \vee \sim q$
- **خطوات الحل:**

1. بقانون ديمورجان: $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

نفي العبارات المسوّرة

- ننفي العبارة المركبة وفق رابطها، لا بتغيير كلمة واحدة فقط. ونفي «كل» هو «يوجد ما لا يحقق»، ونفي «يوجد» هو «كل لا يحقق». تكفي حالة مخالفة واحدة لإبطال حكم عام.
- **مثال:** نفي العبارة "7 عدد غير أوّلي و 49 تقبل القسمة على 7"
- **طريقة التعامل:** حدد طرفي العبارة والرابط بينهما، ثم انف الطرفين وبدل الرابط وفق ديمورجان.
- **الإجابة:** (ج) 7 عدد أوّلي أو 49 لا تقبل القسمة على 7
- **خطوات الحل:**

1. بديمورجان: ننفي كل جزء ونحوّل "و" إلى "أو".
2. النتيجة: "7 عدد أوّلي أو 49 لا تقبل القسمة على 7".

خصائص العمليات المنطقية

- نستعمل الإبدال والتجميع والتوزيع لتبسيط العبارات المنطقية. قانون التوزيع: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$، وبالمثل $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$؛ يُستعمل لإخراج عبارة مشتركة كعامل مشترك أو لفكّها. العبارة أو نفيها صادقة دائمًا، والعبارة مع نفيها خاطئة دائمًا. يمكن مقارنة العبارات أيضًا بجدول الصواب.
- **مثال:** العبارة المكافئة للعبارة

$$(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$$

- **طريقة التعامل:** استخرج الجزء المشترك، ثم افحص العبارة ونفيها في القوس لتبسيط التعبير.
- **الإجابة:** (أ) p
- **خطوات الحل:**

1. بإخراج العامل المشترك: $p \wedge (\sim q \vee q)$. وبما أن $\sim q \vee q \equiv T$: الناتج p

أساليب البرهان

- البرهان المباشر يبدأ بالفرض ويصل إلى النتيجة. برهان المكافئ العكسي يبدأ بنفي النتيجة ليثبت نفي الفرض. برهان التناقض يفترض خلاف المطلوب ثم يستنتج تناقضًا. أما المثال المضاد فأسلوب إبطال لا إثبات: حالة واحدة تحقق شروط عبارة عامة وتخالف نتيجتها، فتكفي وحدها لنفي العبارة.
- **مثال:** لإثبات أنه إذا كان x^2 عدداً زوجياً فإن x عدد زوجي، نفرض أن x عدد فردي فنثبت أن x^2 عدد فردي. ما هو البرهان المستخدم؟
- أ) المثال المضاد
- ب) البرهان بالتناقض

- ج) عكس المباشر
- د) مباشر
- **طريقة التعامل:** قارن نقطة بداية البرهان ونهايته بفرض الشرطية ونتيجتها، ثم حدد الأسلوب المستخدم.
- **الإجابة:** (ج) عكس المباشر
- **خطوات الحل:**

1. المطلوب أصلاً $p \to q$، والمُستخدم فعلاً $\sim q \to \sim p$. هذا برهان عكس المباشر (المكافئ العكسي).

قراءة مخططات فن

- مخطط فن يمثل المجموعات بدوائر متداخلة، ومنطقة التقاطع بين دائرتين تضم العناصر المشتركة بينهما فقط دون باقي المناطق المجاورة. اقرأ العدد من المنطقة الصحيحة فقط دون جمعها مع منطقة أخرى بالخطأ.
- **مثال:** الطلاب الذين يحبون القراءة والرسم في الرسم المجاور (مخطط فِن بثلاث مجموعات: الكتابة، الرسم، القراءة؛ وتقاطع الرسم والقراءة فقط يساوي 3)
- أ) 3
- ب) 7
- ج) 10
- د) 15
- **طريقة التعامل:** حدد منطقة التقاطع بين المجموعتين المذكورتين تحديدًا، دون إضافة مناطق أخرى مجاورة لها.
- **الإجابة:** (أ) 3

- **خطوات الحل:**

1. منطقة تقاطع الرسم والقراءة فقط تساوي 3، وهذا هو المطلوب مباشرة.

المعيار السابع: التفاضل والتكامل وتطبيقاتهما

النهايات: التعويض والصيغ غير المعيّنة

- نبدأ النهاية بالتعويض. إذا ظهرت صيغة غير معينة، مثل صفر على صفر، نبحث عن تحليل أو اختصار أو ضرب في المرافق، ثم نعيد التعويض. الاختصار قرب النقطة لا يعني أن الدالة معرفة عند النقطة نفسها.
- **مثال:**

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

- **طريقة التعامل:** حلل فرق المربعين وابحث عن العامل المشترك قبل إعادة التعويض.
- **الإجابة:** (أ) 6
- **خطوات الحل:**

1. حلّل وبسّط: $\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3 \to 6$ عند $x \to 3$

النهايات المثلثية

- النهايات المثلثية الأساسية تستعمل عندما تقاس الزاوية بالراديان. نحول التعبير إلى النسبة المعروفة، مع مراعاة معاملات الزاوية.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

- **مثال:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}=\cdots$$

- **طريقة التعامل:** استعمل هوية تربط جيب التمام بجيب الزاوية، ثم قارن التعبير بالنهاية الأساسية.
- **الإجابة:** (ج) 1
- **خطوات الحل:**

1. $1-\cos^2 x=\sin^2 x$، فالنهاية $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=1^2=1$

النهايات عند ما لا نهاية

- في نهاية كسر كثيرات الحدود عند اللانهاية نقارن أعلى درجتين. إذا تساوتا نستخدم نسبة المعاملين الرئيسين، وإذا زادت درجة المقام تؤول النهاية إلى صفر. وفي باقي الحالات نتابع النمو والإشارة. وإذا ظهر حد محدود متذبذب مثل $\sin n$ أو $\cos n$ نستعمل نظرية الحصر (الساندويتش): إذا كان $g\le f\le h$ وكان للدالتين g و h النهاية نفسها فإن f تؤول إليها؛ ومنها أن $\frac{\sin n}{n}\to 0$ لأن $-\frac{1}{n}\le\frac{\sin n}{n}\le\frac{1}{n}$

- **مثال:**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+8x^2}{2x^2+x}$$

- **طريقة التعامل:** حدد أعلى قوة في البسط والمقام واقسم عليها، ثم افحص الحدود التي تتلاشى.
- **الإجابة:** (أ) 4
- **خطوات الحل:**

1. درجتا البسط والمقام متساويتان، فالنهاية نسبة أكبر معاملين: $\frac{8}{2}=4$

النهايات من جهة واحدة والاتصال

- النهاية من اليمين أو اليسار تتبع جهة الاقتراب. النهاية المعتادة تتطلب اتفاق الجهتين. الاتصال عند نقطة يتطلب وجود قيمة الدالة والنهاية ومساواتهما. في القيمة المطلقة نحدد إشارة ما داخلها بحسب الجهة.
- **مثال:**

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^{+}}\frac{|x-\sqrt{3}|}{3-x^2}$$

- **طريقة التعامل:** حدد إشارة ما داخل القيمة المطلقة عند الاقتراب من اليمين، ثم حلل المقام واختصر قبل أخذ النهاية.
- **الإجابة:** (ج) $\frac{-1}{2\sqrt{3}}$
- **خطوات الحل:**

1. من اليمين $|x-\sqrt{3}|=x-\sqrt{3}$، وبتحليل المقام: $\frac{x-\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}=\frac{-1}{\sqrt{3}+x}=\frac{-1}{2\sqrt{3}}$

قاعدة لوبيتال

- تستخدم لوبيتال عند تحقق شروطها لصيغتي صفر على صفر أو لانهاية على لانهاية. نشتق البسط والمقام كلًا على حدة ثم نأخذ نهاية النسبة الجديدة، وليست هذه قاعدة مشتقة الكسر.
- **مثال:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

- **طريقة التعامل:** تحقق من الصيغة بالتعويض، ثم قارن طريقة الاشتقاق بطريقة استعمال النهايات المثلثية.
- **الإجابة:** (ب) 0
- **خطوات الحل:**

1. صيغة $\frac{0}{0}$؛ بلوبيتال: $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \to \frac{0}{2} = 0$

تعريف المشتقة بالنهاية

- المشتقة معدل تغير لحظي وميل المماس. تعريفها نهاية نسبة تغير قيمة الدالة إلى تغير المتغير.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- **مثال:** إذا كانت $f(x) = \sin x^2$، أوجد $f'(0)$ بالتعريف
- **طريقة التعامل:** اكتب فرق قيم الدالة عند النقطة وعند زيادة صغيرة، ثم استعمل النهاية المناسبة بعد التبسيط.
- **الإجابة:** (أ) $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)^2 - \sin x^2}{h}$
- **خطوات الحل:**

1. بالتعريف: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$، وبالتعويض عند $x = 0$:
$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h^2 - \sin 0}{h} = 0$

قواعد الاشتقاق الأساسية

- مشتقة الثابت صفر، ومشتقة المجموع مجموع المشتقات. في قاعدة القوة نضرب في الأس ثم ننقصه واحدًا. حاصل الضرب والكسر لهما قاعدتان مستقلتان؛ لا نشتق العاملين ثم نضرب المشتقتين.

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

- **مثال:** إذا كانت $f(x) = \frac{7}{2}\sqrt[3]{x^5}$ فإن $f'(x)$ تساوي
- **طريقة التعامل:** حول الجذر أو الكسر إلى قوة عند الحاجة، ثم طبق قاعدة القوة مع الاحتفاظ بالمعامل.
- **الإجابة:** (أ) $\frac{35\,x^{\frac{2}{3}}}{6}$
- **خطوات الحل:**

1. اكتب $f(x) = \frac{7}{2}x^{5/3}$، ثم بقاعدة القوة: $f'(x) = \frac{35}{6}x^{2/3}$

مشتقات الدوال المثلثية

- مشتقة الجيب جيب التمام، ومشتقة جيب التمام سالب الجيب، ومشتقة الظل مربع القاطع. إذا كانت الزاوية دالة في المتغير نضرب أيضًا في مشتقة الداخل.

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

- **مثال:** مشتقة المقدار

$$\frac{\sin x}{\tan x}$$

- **طريقة التعامل:** ميز الدالة المثلثية والزاوية الداخلة فيها، ثم استعمل المشتقة المناسبة وقاعدة السلسلة.
- **الإجابة:** (ب) $-\sin x$
- **خطوات الحل:**

1. بسّط بمتطابقة $\tan x$: $\frac{\sin x}{\tan x} = \cos x$، ومشتقتها $-\sin x$

قاعدة السلسلة

- في الدالة المركبة نشتق الدالة الخارجية مع إبقاء الداخل، ثم نضرب في مشتقة الداخل. تنطبق الفكرة على القوى والجذور والدوال المثلثية والأسية واللوغاريتمية.

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \times g'(x)$$

- **مثال:** مشتقة الدالة

$$y = (x^2 + 1)^6$$

- **طريقة التعامل:** حدد القوة الخارجية والمقدار الداخلي، ثم طبق قاعدة السلسلة دون نشر القوة.
- **الإجابة:** (أ) $12x(x^2 + 1)^5$

- **خطوات الحل:**

1. بقاعدة السلسلة: $y' = 6(x^2+1)^5 \cdot 2x = 12x(x^2+1)^5$

مشتقات الدوال العكسية والأسية واللوغاريتمية

- مشتقة الأسية ذات الأساس الطبيعي تساوي الأسية نفسها مضروبة في مشتقة الأس. مشتقة اللوغاريتم الطبيعي لدالة هي مشتقة الدالة على الدالة. للأساس العام يظهر عامل لوغاريتم الأساس.

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

- **مثال:** إذا كانت $f(t) = a^{\ln(t+1)} - 1$ دالة المسافة، أوجد السرعة بعد 3 ثوانٍ

- **طريقة التعامل:** اشتق دالة المسافة باستخدام قواعد الأسية واللوغاريتم وقاعدة السلسلة، ثم استعمل الزمن المطلوب.

- **الإجابة:** (ب) $\dfrac{a^{\ln 4} \cdot \ln a}{4}$

- **خطوات الحل:**

1. بالسلسلة: $f'(t) = a^{\ln(t+1)} \cdot \dfrac{1}{t+1} \cdot \ln a$، وعند $t = 3$:

$$f'(3) = \frac{a^{\ln 4} \cdot \ln a}{4}$$

الاشتقاق اللوغاريتمي

- الاشتقاق اللوغاريتمي يفيد عندما يكون المتغير في الأس والأساس معًا. نأخذ اللوغاريتم ونستخدم خواصه لتحويل القوى إلى معاملات، ثم نشتق ضمنيًا ونعيد الدالة الأصلية.
- **مثال:** ما هي مشتقة الدالة

$$f(x) = \frac{x^{2x}}{x}$$

- **طريقة التعامل:** بسط الكسر على صورة قوة، ثم خذ اللوغاريتم واستعمل قاعدة اشتقاق حاصل الضرب.
- **الإجابة:** (أ) $x^{2x-1}\left(2\ln(x) + 2 - \frac{1}{x}\right)$
- **خطوات الحل:**

1. بسّط $f(x) = x^{2x-1}$، ثم بالاشتقاق اللوغاريتمي: $\ln y = (2x-1)\ln x$ ف

$$y' = x^{2x-1}\left(2\ln x + 2 - \frac{1}{x}\right)$$

الاشتقاق الضمني

- عندما تربط المعادلة المتغيرين دون عزل أحدهما، نشتق الطرفين مع اعتبار الآخر دالة في المتغير. تظهر مشتقته مع كل حد يحتويه، ثم نجمع هذه الحدود ونعزل المشتقة المطلوبة.
- **مثال:** إذا كانت $x^2 + y^2 = 20$ فإن $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(2, 4)$ تساوي
- **طريقة التعامل:** اشتق المعادلة ضمنيًا، ثم اعزل مشتقة المتغير التابع واستعمل إحداثيات النقطة.
- **الإجابة:** (ب) $\frac{-1}{2}$
- **خطوات الحل:**

1. اشتقاق ضمني: $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$، وعند $(2, 4)$:
$$4 + 8\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}$$

المماس والعمودي على المنحنى

- ميل المماس عند نقطة هو قيمة المشتقة فيها. ميل العمودي سالب مقلوب ميل المماس إذا كان الميل غير صفري. نكتب معادلة المستقيم من النقطة والميل، مع تمييز المماس الرأسي عن الأفقي.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- **مثال:** أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x) = x^2 - \frac{4}{x}$ عند النقطة التي فيها
$$x = 1$$

- **طريقة التعامل:** اشتق الدالة ثم استعمل قيمة المتغير المعطاة لتحديد ميل المماس.
- **الإجابة:** (ج) 6
- **خطوات الحل:**

1. اكتب $f(x) = x^2 - 4x^{-1}$، فـ $f'(x) = 2x + \frac{4}{x^2}$، وعند $x = 1$:
$$f'(1) = 6$$

مشتقة الدالة العكسية

- مشتقة الدالة العكسية عند صورة نقطة هي مقلوب مشتقة الدالة الأصلية عند النقطة، بشرط وجود المشتقات وعدم انعدام المقام. لا نعوض في مشتقة الأصل بالقيمة نفسها دون تحديد ما يقابلها.

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

- **مثال:** لتكن f دالة أحادية بحيث f, f^{-1} قابلتان للاشتقاق، وكان $f'(-1) = 7$، $f'(2) = 11$، $f(2) = -1$، $f(-1) = 3$. فما قيمة

$$\left(f^{-1}\right)'(-1)$$

- **طريقة التعامل:** ابحث عن المدخل الذي صورته هي القيمة المطلوبة، ثم استخدم مشتقة الأصل عند ذلك المدخل.
- **الإجابة:** (أ) $\frac{1}{11}$
- **خطوات الحل:**

1. بقانون مشتقة الدالة العكسية: $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$، وبما أن $f(2) = -1$:

$$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{11}$$

الاتصال وقابلية الاشتقاق

- قابلية الاشتقاق تستلزم الاتصال، لكن الاتصال لا يستلزم الاشتقاق. عند الزوايا الحادة قد تتصل الدالة وتختلف مشتقتا الجهتين. وفي الدالة المتعددة نختبر الاتصال أولًا ثم مشتقتي الجهتين.

- **مثال:** الدالة $f(x) = 2|x - 1|$ عند النقطة

$$x = 1$$

- أ) متصلة وقابلة للاشتقاق
- ب) متصلة وغير قابلة للاشتقاق
- ج) غير متصلة وقابلة للاشتقاق
- د) غير متصلة وغير قابلة للاشتقاق
- **طريقة التعامل:** افحص سلوك الدالة عند رأس القيمة المطلقة وقارن الميل من الجهتين.
- **الإجابة:** (ب) متصلة وغير قابلة للاشتقاق
- **خطوات الحل:**

1. الدالة متصلة عند $x = 1$ (النهايتان متساويتان)، لكن ميل المماس 2 من اليمين و-2 من اليسار، فهي غير قابلة للاشتقاق هناك.

المشتقات العليا وقراءة التمثيل البياني

- المشتقات العليا تنتج بتكرار الاشتقاق. قبل تكرار خطوات كثيرة نبحث عن نمط في المعاملات والدالة، ونتحقق من ترتيبه. في قراءة الرسم نميز قيمة الدالة عن ميلها وعن تقعرها.
- **مثال:** إذا كانت $y = e^{2x+1}$ فإن $\dfrac{d^{100}y}{dx^{100}}$ عند $x = 0$ تساوي
- **طريقة التعامل:** اشتق أول مرات قليلة لتحديد النمط، ثم اربطه برتبة المشتقة المطلوبة قبل التعويض.
- **الإجابة:** (ب) $2^{100}e$
- **خطوات الحل:**

1. كل اشتقاق يضرب في 2: $y^{(n)} = 2^n e^{2x+1}$، وعند $x = 0$: $\dfrac{d^{100}y}{dx^{100}} = 2^{100}e$

القيم القصوى واختبار المشتقة

- القيم القصوى المحتملة عند انعدام المشتقة أو عدم وجودها، مع فحص أطراف الفترة عند البحث عن قيمة مطلقة. تغيير إشارة المشتقة يحدد صغرى أو عظمى محلية، ويمكن استخدام المشتقة الثانية إذا كانت غير صفرية.
- **مثال:** قيمة a التي تجعل للدالة $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 72x + 5$ قيمة صغرى محلية عند

$$x = a$$

- **طريقة التعامل:** طبق شرط النقطة الحرجة عند الموقع المعطى، ثم تحقق من كونها صغرى بدل الاكتفاء بانعدام المشتقة.
- **الإجابة:** (د) 3
- **خطوات الحل:**

1. $f'(x) = 6x^2 + 2ax - 72$، وعند $x = a$: $8a^2 = 72 \Rightarrow a = \pm 3$، وبدراسة الإشارة تكون القيمة الصغرى عند $a = 3$

رتابة الدوال التكعيبية

- إشارة المشتقة الأولى تحدد التزايد والتناقص. للدالة التكعيبية مشتقة تربيعية، وعدد جذورها وإشارتها يحددان فترات الرتابة وإمكان وجود قيم قصوى.
- **مثال:** اعتبر الدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث $a > 0$، أي العبارات الآتية قد لا تكون صحيحة؟
- أ) يوجد x_0 بحيث $f(x_0) < 0$
- ب) يوجد x_0 بحيث $f(x_0) > 0$
- ج) يوجد x_0 بحيث $f'(x_0) < 0$

- د) يوجد x_0 بحيث $f'(x_0) > 0$
- **طريقة التعامل:** اكتب المشتقة وناقش إشارتها وفق معاملات الدالة، ثم اختبر عمومية كل عبارة.
- **الإجابة:** (ج) يوجد x_0 بحيث $f'(x_0) < 0$
- **خطوات الحل:**

1. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ تربيعية معاملها الرئيس موجب، فقد لا تكون سالبة دائمًا، فالعبارة (ج) قد لا تصح.

التقعّر ونقطة الانقلاب

- المشتقة الثانية تحدد التقعر. نقطة الانقلاب تتطلب تغير التقعر، فلا يكفي انعدام المشتقة الثانية وحده. نختبر الإشارة قبل النقطة وبعدها.
- **مثال:** إذا كانت الدالة $f(x) = x^4 - 2ax^2$ لها نقطة انقلاب عند $x = 2$، أوجد قيمة a
- **طريقة التعامل:** استعمل شرط المشتقة الثانية عند موضع الانقلاب، ثم تحقق من تغير إشارة التقعر.
- **الإجابة:** (د) 12
- **خطوات الحل:**

1. $f''(x) = 12x^2 - 4a$، وعند $x = 2$: $48 - 4a = 0 \Rightarrow a = 12$

نظرية القيمة المتوسطة

- إذا كانت الدالة متصلة على الفترة المغلقة وقابلة للاشتقاق داخلها، فإن ميل المماس في نقطة داخلية يساوي ميل القاطع بين الطرفين.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- **مثال:** ما قيمة c التي تحقّق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2 + 1$ على الفترة

$$[0, 1]$$

- **طريقة التعامل:** تحقق من الشروط، ثم ساو المشتقة بمعدل التغير بين طرفي الفترة وابحث عن نقطة داخلها.
- **الإجابة:** (ج) $\frac{1}{2}$
- **خطوات الحل:**

1. بنظرية القيمة المتوسطة: $f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$، ف

$$2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \in (0, 1)$$

التكامل: القواعد الأساسية

- التكامل غير المحدود يبحث عن دالة مشتقتها المقدار المعطى، ونضيف ثابت التكامل. في قاعدة القوة نزيد الأس واحدًا ثم نقسم عليه، باستثناء الأس سالب واحد الذي يعطي لوغاريتم القيمة المطلقة.

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

- **مثال:**

$$\int \frac{x^2-4}{\sqrt{x}(x-2)}dx$$

- **طريقة التعامل:** حلل البسط واختصر العامل المشترك، ثم حول التعبير إلى قوى مناسبة للتكامل.
- **الإجابة:** (أ) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+c$
- **خطوات الحل:**

1. حلّل واختصر: $\frac{(x-2)(x+2)}{x^{1/2}(x-2)}=x^{1/2}+2x^{-1/2}$، وبالتكامل: $\frac{2}{3}x^{3/2}+4x^{1/2}+c$

التكامل بالتعويض

- بالتعويض نختار المقدار الداخلي متغيرًا جديدًا ونستبدل تفاضله، ثم نكامل ونعيد المتغير الأصلي. وجود مشتقة الداخل، أو مضاعفها، بجواره علامة مفيدة لاختيار التعويض.
- **مثال:**

$$\int (x^2+2x)^3(2x+2)\,dx=\cdots$$

- **طريقة التعامل:** اختر ما داخل القوة متغيرًا جديدًا وقارن مشتقته بالعامل الموجود في التكامل.
- **الإجابة:** (ب) $\frac{(x^2+2x)^4}{4}+c$
- **خطوات الحل:**

1. بالتعويض $u=x^2+2x$: $\int u^3du=\frac{u^4}{4}+c=\frac{(x^2+2x)^4}{4}+c$

التكامل بالتجزيء

- التكامل بالتجزيء يفيد في حاصل ضرب لا يناسب التعويض المباشر. نختار جزءًا يبسّطه الاشتقاق وجزءًا يسهل تكامله، وقد نكرر الطريقة عند وجود كثير حدود.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

- **مثال:** أفضل طريقة لتكامل

$$\int x^3 e^{2x}\,dx$$

- **طريقة التعامل:** قارن أثر اشتقاق كثير الحدود وأثر تكامل الأسية، ثم حدد الطريقة التي تبسط الناتج تدريجيًا.
- **الإجابة:** (أ) التجزيء
- **خطوات الحل:**

1. حاصل ضرب كثيرة حدود في دالة أسية، فالأنسب التكامل بالتجزيء: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

- إذا عرّفنا دالة بتكامل ذي حد أعلى متغير، فمشتقتها هي الدالة داخل التكامل عند ذلك الحد. وإذا كان الحد دالة أخرى نستخدم قاعدة السلسلة.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

- **مثال:** إذا كانت $f(x) = \int_2^x t^2\,dt$ فإن $f''(3)$ تساوي
- **طريقة التعامل:** استخدم النظرية لإيجاد المشتقة الأولى، ثم اشتق مرة أخرى قبل استعمال

النقطة المطلوبة.

- **الإجابة:** (ج) 6
- **خطوات الحل:**

1. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$، فـ $f'(x) = x^2$ و$f''(x) = 2x$، وعند $x = 3$: $f''(3) = 6$

التكامل المحدود وخواصه

- التكامل المحدود للدالة المتصلة يساوي قيمة الدالة الأصلية عند الحد الأعلى ناقص قيمتها عند الأدنى. تبديل الحدين يعكس الإشارة، وتساويهما يعطي صفرًا. ويمكن تجزئة الفترة وجمع التكاملات.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

- **مثال:** $\int_2^2 2(x^2+1)^3 x\,dx$ يساوي
- **طريقة التعامل:** افحص الحدين قبل إجراء التكامل؛ فقد تختصر إحدى خواص التكامل العمل كله.
- **الإجابة:** (ج) 0
- **خطوات الحل:**

1. تساوي حدَّي التكامل يجعل الناتج صفرًا مباشرة بلا حساب.

المساحة تحت المنحنى وبين منحنيين

- مساحة المنطقة تساوي تكامل الفرق بين الحد الأعلى والأدنى. إذا تغير ترتيب المنحنيين نقسم الفترة. التكامل قد يكون سالبًا، أما المساحة الهندسية فلا تكون سالبة.
- **مثال:** مساحة المنطقة المحدودة بين المنحنيات $y = e^x$، $y = 0$، $x = 0$، $x = 1$ تساوي
- **طريقة التعامل:** حدد الحد الأعلى والأدنى وحدي الفترة، ثم اكتب تكامل الفرق دون استخراج قيمته.
- **الإجابة:** (د) $e - 1$
- **خطوات الحل:**

1. $\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$

تطبيقات الحركة

- مشتقة دالة الموضع تعطي السرعة، ومشتقة السرعة تعطي التسارع. التكامل يعيدنا في الاتجاه المعاكس، مع استخدام القيمة الابتدائية لتحديد الثابت.
- **مثال:** إذا كانت $f(x)$ دالة المسافة فإن $f''(x)$ تمثل دالة
- **طريقة التعامل:** حدد مرتبة الاشتقاق المطلوبة وعلاقتها بالموضع والسرعة والتسارع.
- **الإجابة:** (ب) التسارع
- **خطوات الحل:**

1. مشتقة دالة المسافة الأولى سرعة، والثانية $f''(x)$ تسارع.

قانون الحد النوني للمتتابعات

- الحد النوني للمتتابعة الحسابية يساوي الحد الأول زائد حاصل ضرب رتبة الحد ناقص واحد في الأساس (الفرق الثابت)، والحد النوني للهندسية يساوي الحد الأول مضروبًا في الأساس (النسبة الثابتة) مرفوعًا لرتبة الحد ناقص واحد.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad a_n = a_1\, r^{\,n-1}$$

- طرق مختصرة من القانون نفسه، تفيد عند معرفة حدين وعدد الحدود بينهما: الأساس الحسابي يساوي الفرق بين الحدين على الفرق بين رتبتيهما. وبالنسبة للهندسية، الأساس مرفوعًا لفرق رتبتي الحدين يساوي الحد الأكبر على الحد الأصغر. وفي الحسابية، إذا عُرف الأساس، فعدد الحدود يساوي الفرق بين الحدين على الأساس، مضافًا إليه واحد. ويمكن أيضًا إيجاد الحد النوني للحسابية مباشرة: نضرب الأساس في رتبة الحد المطلوب، ثم نطرح الأساس من الحد الأول ونضيف الناتج.
- **مثال:** متتابعة حسابية حدها الأول 27، وحدها السادس 12، ما هو الحد الرابع؟
- أ) 18
- ب) 27
- ج) 12
- د) 19
- **طريقة التعامل:** أوجد الأساس من الحدين المعطيين بقانون الحد النوني، ثم عوّض برتبة الحد المطلوب.
- **الإجابة:** (أ) 18
- **خطوات الحل:**

1. أوجد الأساس: $5d = 12 - 27 \Rightarrow d = -3$، ثم $a_4 = 27 + 3(-3) = 18$

- **مثال:** ما هو الحد 101 في المتتابعة $5, 10, 20, \ldots$؟

- أ) $5 \cdot 2^{100}$
- ب) $5 \cdot 2^{101}$
- ج) $5 + 2^{100}$
- د) $5 + 2^{101}$
- **طريقة التعامل:** تحقّق من ثبات النسبة بين الحدود المتتالية لتأكيد أنها هندسية، ثم طبّق قانون الحد النوني مباشرة؛ الأس دائمًا رتبة الحد ناقص واحد.
- **الإجابة:** (أ) $5 \cdot 2^{100}$
- **خطوات الحل:**

1. متتابعة هندسية أساسها $r = 2$، فـ $a_{101} = 5 \cdot 2^{100}$

المتتابعات في سياق النهايات

- المتتابعة متقاربة إذا اقتربت حدودها من قيمة محدودة. نقارن نمو البسط والمقام، وننتبه إلى التذبذب؛ تغير الإشارة لا يمنع التقارب إذا تناقص مقدار الحدود إلى صفر.
- **مثال:** أي المتتابعات الآتية متقاربة؟
- أ) $\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$
- ب) $\left(\frac{1}{n^n}\right)$
- ج) $((-1)^n)$
- د) $\left(\frac{2^n}{n}\right)$
- **طريقة التعامل:** افحص نهاية كل خيار، وميز التذبذب المستمر عن التذبذب الذي يصغر مقداره.

- **الإجابة:** (ب) $\left(\frac{1}{n^n}\right)$
- **خطوات الحل:**

1. (أ) درجة البسط أكبر فمتباعدة، (ب) $\lim \frac{1}{n^n} = 0$ متقاربة، (ج) متذبذبة، (د) متباعدة، فالمتقاربة هي (ب).

الزوجية والفردية في الاشتقاق والتكامل

- مشتقة الدالة الزوجية فردية ومشتقة الفردية زوجية متى وجدت المشتقة. تكامل الدالة الفردية على فترة متناظرة صفر، وتكامل الزوجية ضعف التكامل على نصف الفترة.
- **مثال:** إذا كانت الدالة زوجية فإن مشتقتها
- **طريقة التعامل:** استعمل تعريف الزوجية وقاعدة الاشتقاق لتحديد نوع المشتقة، دون افتراض أن الدالة ومشتقتها من النوع نفسه.
- **الإجابة:** (أ) فردية
- **خطوات الحل:**

1. من $f(-x) = f(x)$، اشتق الطرفين: $-f'(-x) = f'(x)$، أي $f'(-x) = -f'(x)$ (فردية).

الاشتقاق الجزئي

- في الاشتقاق الجزئي نشتق بالنسبة إلى متغير واحد ونثبت بقية المتغيرات.
- **مثال:** أوجد $\frac{\partial z}{\partial y}$ إذا كانت

$$z = xy + x^2y + y^2x$$

- **طريقة التعامل:** اعتبر المتغير الآخر ثابتًا، ثم اشتق كل حد بالنسبة إلى المتغير المطلوب.

- **الإجابة:** (ب) $x + x^2 + 2xy$
- **خطوات الحل:**

1. اشتق كل حد بالنسبة لـy معتبرًا x ثابتًا: $\dfrac{dz}{dy} = x + x^2 + 2xy$

التكامل الثنائي

- التكامل الثنائي يطبق تكاملًا داخليًا ثم خارجيًا. نثبت المتغير الآخر أثناء كل تكامل، ونحافظ على الحدود وترتيب التفاضلات.
- **مثال:**

$$\int_0^1 \int_0^1 xy \, dx \, dy = \cdots$$

- **طريقة التعامل:** ابدأ بالتكامل الداخلي بالنسبة إلى المتغير الأقرب إلى المقدار، ثم استخدم الناتج في التكامل الخارجي.
- **الإجابة:** (د) $\dfrac{1}{4}$
- **خطوات الحل:**

1. التكامل الداخلي: $\int_0^1 xy \, dx = \dfrac{y}{2}$، ثم الخارجي: $\int_0^1 \dfrac{y}{2} dy = \dfrac{1}{4}$

المتسلسلات اللانهائية

- المتسلسلة الهندسية اللانهائية تتقارب إذا كان مقدار النسبة المشتركة أصغر من الواحد. مجموعها أول حد على واحد ناقص النسبة. تقارب أي متسلسلة يستلزم أن تؤول حدودها إلى صفر، لكن هذا الشرط وحده لا يكفي.

$$S = \frac{a}{1-r} \quad (|r| < 1)$$

- **مثال:** لكي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2}\right)^n$ متقاربة يجب أن تقع k في الفترة
- **طريقة التعامل:** استخرج النسبة المشتركة من الحد العام ثم طبق شرط التقارب عليها، دون حساب المجموع.
- **الإجابة:** (ج) $(-2, 2)$
- **خطوات الحل:**

1. شرط التقارب: $\left|\frac{k}{2}\right| < 1 \Rightarrow -2 < k < 2$

- **مثال:** مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ يساوي
- أ) $\frac{1}{3}$
- ب) $\frac{1}{2}$
- ج) $\frac{3}{2}$
- د) 3

- **طريقة التعامل:** احسب الحد الأول فعليًا بالتعويض بـ $n = 1$ في الحد العام، لا بافتراضه مساويًا للمعامل الثابت مباشرة.
- **الإجابة:** (د) 3
- **خطوات الحل:**

1. الحد الأول عند $n = 1$: $a_1 = \frac{3}{2}$، والأساس $r = \frac{1}{2}$.

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{3/2}{1/2} = 3$$

المعيار الثامن: استراتيجيات التعليم والتعلّم

عناصر المعرفة الرياضية

- تتكون المعرفة الرياضية من مفاهيم وتعميمات ومهارات ومسائل. المفهوم يجمع حالات بصفة مشتركة، والتعميم علاقة أو قاعدة، والمهارة أداء إجراء بإتقان. نميز العنصر المعرفي عن العملية المستخدمة لتنفيذه. أما مكوّنات الكفاءة الرياضية الخمسة (المتشابكة) فهي: الاستيعاب المفاهيمي (فهم المفاهيم والعلاقات بينها)، والطلاقة الإجرائية (تنفيذ الإجراءات بمرونة ودقة وكفاءة، وتمو بالتدرب على مسائل مشابهة وبتنويع طرق الحل)، والكفاءة الاستراتيجية (صياغة المسائل وتمثيلها وحلها)، والاستدلال التكيّفي (التفكير المنطقي والتبرير والتأمل)، والرغبة المنتجة (النظر إلى الرياضيات بوصفها مفيدة وجديرة بالجهد).
- **مثال:** أي من الآتي لا يُعدّ من عناصر المعرفة الرياضية؟
- أ) المفاهيم
- ب) العمليات
- ج) التعاميم
- د) المهارات
- **طريقة التعامل:** صنف الخيارات وفق طبيعة المعرفة، لا وفق كونها كلمات شائعة في درس الرياضيات.
- **الإجابة:** (ب) العمليات
- **خطوات الحل:**

عناصر المعرفة الرياضية أربعة: المفاهيم والتعاميم والمهارات والخوارزميات؛ العمليات إجراء

يُنفَّذ داخلها لا عنصر مستقل.

تدريس المفاهيم: الأمثلة واللاأمثلة

- لتدريس مفهوم نعرض أمثلة تحقق خصائصه ولاأمثلة تخالفها، ونناقش الخاصية الفارقة. المقارنة تساعد الطالب على بناء المعنى بدل حفظ اسم الشكل أو مظهر واحد له.
- **مثال:** عرض معلم مثالاً على شبه المنحرف بعد أن عرض عدة أمثلة على متوازي الأضلاع. إن المعلم بذلك يريد توصيل المعلومة إلى طلابه عن طريق
- أ) المفاهيم
- ب) القواعد
- ج) التعاميم
- د) الحقائق
- **طريقة التعامل:** حدد ما يريد المعلم توضيحه من المقارنة بين الشكلين، ثم اربط الإجراء بعنصر المعرفة المقصود.
- **الإجابة:** (أ) المفاهيم
- **خطوات الحل:**

عرض اللامثال (شبه المنحرف) بعد أمثلة متوازي الأضلاع أسلوب تدريس المفاهيم بالأمثلة واللاأمثلة.

الحسّ العددي

- الحس العددي فهم الأعداد وعلاقاتها ومرونة التعامل معها. يظهر في التقدير والحساب الذهني واختيار طريقة مناسبة والحكم على معقولية الناتج، ولا يقتصر على تنفيذ خوارزمية مكتوبة.
- **مثال:** يُعدّ التقدير والحساب الذهني
- أ) حسّاً عددياً
- ب) تفكيراً رياضياً
- ج) تفكيراً حاسوبياً
- د) استنتاجياً
- **طريقة التعامل:** انظر إلى الغرض من التقدير والحساب الذهني، ثم اربطه بفهم الأعداد ومعقولية النتائج.
- **الإجابة:** (أ) حسّاً عددياً
- **خطوات الحل:**

الحسّ العددي فهم الأعداد وعلاقاتها والحكم على معقولية النتائج، ويشمل التقدير والحساب الذهني.

طرق تدريس الرياضيات

- التدريس الاستقرائي يبدأ بأمثلة للوصول إلى قاعدة، والاستنتاجي يبدأ بالقاعدة لتطبيقها. في الاكتشاف يستنتج الطالب العلاقة بتوجيه مناسب، وفي التعلم التعاوني يعمل الطلاب بأدوار على هدف مشترك.
- **مثال:** الطريقة التي يبدأ فيها المعلم بإعطاء أمثلة للوصول إلى القاعدة تسمى
- أ) الاستقراء

- ب) الاستنتاج
- ج) الاستدلال
- د) حل المشكلات
- **طريقة التعامل:** تتبع ترتيب عرض الأمثلة والقاعدة؛ فهذا يحدد اتجاه الطريقة التعليمية.
- **الإجابة:** (أ) الاستقراء
- **خطوات الحل:**

الاستقراء انتقال من أمثلة جزئية إلى قاعدة عامة؛ الاستنتاج عكسه (من القاعدة إلى الأمثلة).

نظريات التعلّم وروّادها

- نربط النظرية بملامحها: بياجيه بالنمو المعرفي (ومراحله: الحسية الحركية من الولادة إلى نحو سنتين، ثم ما قبل العمليات إلى نحو سبع سنوات، ثم العمليات المادية المحسوسة إلى نحو إحدى عشرة سنة، ثم العمليات المجردة الشكلية بعدها، وفيها طالب المرحلة الثانوية القادر على التفكير الافتراضي)، وبرونر بالاكتشاف وصور التمثيل، ودينز بمراحل تعلم المفهوم من اللعب إلى الترميز. لا يكفي وجود نشاط عملي للحكم على اسم النظرية.
- **مثال:** يمكن اكتساب المعلومات الرياضية من خلال المراحل الستة للمفاهيم الرياضية وتبدأ من اللعب الحر إلى الترميز، للعالم
- أ) بياجيه
- ب) جانييه
- ج) برونر
- د) دينز
- **طريقة التعامل:** ابحث عن العلامة المحددة في الوصف، وهي عدد المراحل وبدايتها ونهايتها، ثم طابقها مع النظرية.

- **الإجابة:** (د) دينز
- **خطوات الحل:**

دينز صاحب نظرية المراحل الست لتعلّم المفاهيم الرياضية، تبدأ باللعب الحر وتنتهي بالترميز.

مستويات بلوم المعرفية

- في مستويات بلوم نميز التذكر عن فهم المعنى، والتطبيق عن تحليل العلاقات، والتقويم عن الإبداع. تحديد المستوى يعتمد على ما يفعله الطالب بالفعل، لا على صعوبة الأرقام وحدها.
- **مثال:** اختبر معلم طلابه بطرح أسئلة سابقة مع تغيير الأرقام. يقيس المعلم مستوى
- أ) التحليل
- ب) التطبيق
- ج) الفهم
- د) التذكر
- **طريقة التعامل:** حدد هل المطلوب استرجاع معرفة أم استخدام إجراء معلوم مع معطيات جديدة.
- **الإجابة:** (ب) التطبيق
- **خطوات الحل:**

التطبيق توظيف إجراء متعلَّم على بيانات جديدة بالخطوات نفسها؛ الفهم إعادة صياغة الفكرة أو شرحها بأسلوب مختلف.

التقويم وأساليبه

- التقويم القبلي يسبق التعلم، والتكويني يرافقه لتحسينه، والختامي يأتي بعده للحكم على التحصيل. التقويم الذاتي يصحح فيه الطالب عمله، وتقويم الأقران يراجع فيه عمل زميله.
- **مثال:** معلم قسّم الفصل إلى مجموعات وأعطى كل مجموعة ورقة عمل، وعند الانتهاء من الحل تبادل الطلاب الأوراق وكل مجموعة صحّحت ورقة المجموعة الأخرى. ما قام به المعلم يسمى
- أ) تقويم ذاتي
- ب) تقويم فردي
- ج) تقويم الأقران
- د) تقويم وثائقي
- **طريقة التعامل:** حدد من يقوم بالتصحيح ولمن، ثم ميز ذلك عن توقيت التقويم.
- **الإجابة:** (ج) تقويم الأقران
- **خطوات الحل:**

تقويم عمل زميل يسمّى تقويم الأقران؛ التقويم الذاتي يصحّح فيه الطالب عمله هو.

المهام مفتوحة النهاية

- المهمة المفتوحة تسمح بأكثر من إجابة صحيحة أو أكثر من مسار مناسب. نميزها عن سؤال محدد الجواب حتى لو طال حله. تساعد على النقاش ومقارنة الطرق وتبرير الاختيارات.
- **مثال:** تُعدّ المهام المفتوحة النهاية من الاتجاهات الحديثة في تعلّم الرياضيات، فأي مما يأتي يمثّل مهمة مفتوحة النهاية؟
- أ) إذا كان قياس زاويتين في مثلث $60°$ و $25°$، أوجد قياس الزاوية الأخرى
- ب) إذا كانت نسبة الماء إلى اليابسة في الكرة الأرضية 7 : 3، فما النسبة المئوية للماء؟

- ج) إذا كانت 84 كعكة تكفي 28 طفلاً، فكم كعكة تكفي لاحتفال 30 طفلاً؟
- د) اكتب ثلاثة كسور اعتيادية يمكن كتابتها على صورة نسبة مئوية تقع بين 50% و 75%
- **طريقة التعامل:** افحص عدد الإجابات الممكنة في كل مهمة، لا طول السؤال أو صعوبته.
- **الإجابة:** (د) اكتب ثلاثة كسور اعتيادية يمكن كتابتها على صورة نسبة مئوية تقع بين 50% و 75%
- **خطوات الحل:**

المهمة المفتوحة لها أكثر من إجابة صحيحة؛ هنا عدد لا نهائي من الكسور بين $\frac{50}{100}$ و$\frac{75}{100}$

اليدويات والوسائل التعليمية

- الوسائل المحسوسة تربط الفكرة المجردة بنشاط يراه الطالب ويجربه. نختار الوسيلة بحسب المفهوم المراد تعليمه، ونربط استخدامها باللغة والرمز بدل الاكتفاء بالتلاعب بها.
- **مثال:** تُستخدم العيدان الملوّنة في
- أ) منازل الأعداد
- ب) الكسور
- ج) التفكير المنطقي
- د) الأطوال
- **طريقة التعامل:** اربط طريقة تجميع العيدان بالفكرة العددية التي تمثلها، ثم قارنها بالخيارات.
- **الإجابة:** (أ) منازل الأعداد
- **خطوات الحل:**

العيدان الملوّنة من اليدويات لتمثيل منازل الأعداد (آحاد وعشرات ومئات) بحزم العيدان.

مهارات التفكير الإبداعي

- الطلاقة كثرة الأفكار، والمرونة تنوعها والانتقال بين طرقها، والأصالة إنتاج أفكار جديدة غير مألوفة. نحدد المهارة من طبيعة الأداء المطلوب لا من وصفه العام بأنه إبداع.
- **مثال:** عندما تبتكر طرقاً جديدة، تنّمي لديك مهارة
- أ) المرونة
- ب) الأصالة
- ج) الطلاقة
- د) الإفاضة
- **طريقة التعامل:** افحص هل الوصف يركز على عدد الطرق أم تنوعها أم جدتها.
- **الإجابة:** (ب) الأصالة
- **خطوات الحل:**

الأصالة إنتاج أفكار جديدة غير مألوفة؛ تختلف عن المرونة (تغيير زاوية التفكير) والطلاقة (كثرة الأفكار).

صعوبات التعلّم ومعالجتها

- علاج صعوبة التعلم يبدأ بتحديد موضعها، ثم نشاط يستهدفه مع تغذية راجعة. عند الخلط بين التمثيلات نعرضها ونقارن خصائصها ونربط الصور المتكافئة، بدل تكرار الشرح نفسه فقط.
- **مثال:** معلم لا يفرّق طلابه بين تمثيلات الدوال الخطية، ما هي الطريقة الصحيحة التي يجب على المعلم اتّباعها؟
- أ) يعطي أمثلة من واقع الحياة
- ب) عرض أشكال مختلفة للدالة الخطية بيانياً

- ج) تمثيل الدوال على نفس الرسمة
- **طريقة التعامل:** حدد سبب الخلط في وصف المشكلة، ثم اختر إجراء يساعد على التمييز بين التمثيلات.
- **الإجابة:** (ب) عرض أشكال مختلفة للدالة الخطية بيانياً
- **خطوات الحل:**

عرض أشكال مختلفة للدالة الخطية بيانيًا يساعد الطالب على تمييز الفروق بين التمثيلات، وهو علاج مباشر للصعوبة.

المعيار التاسع: حل المسألة واستراتيجياتها

المسألة والتمرين

- التمرين يستخدم طريقة معروفة لدى المتعلم، والمسألة تتطلب بحثًا عن طريقة لأن الحل غير جاهز له. الفرق يعتمد على خبرة المتعلم، وقد يكون الموقف نفسه تمرينًا لشخص ومسألة لآخر.
- **مثال:** موقف جديد يتعرّض له المتعلم وليس له حل جاهز في ذهنه
- أ) المسألة
- ب) المفهوم
- ج) التمرين
- د) المهارة
- **طريقة التعامل:** اسأل هل يملك المتعلم إجراء جاهزًا أم يحتاج إلى اختيار استراتيجية جديدة.
- **الإجابة:** (أ) المسألة
- **خطوات الحل:**

المسألة موقف جديد بلا حل جاهز في ذهن المتعلم؛ التمرين يعرف الطالب طريقة حله مسبقًا.

خطوات بوليا الأربع

- خطوات بوليا: فهم المطلوب والمعطيات، ثم التخطيط واختيار استراتيجية، ثم تنفيذ الخطة، ثم التحقق من النتيجة والطريقة. نميز هذه المراحل بما يحدث فيها، لا بترتيب كلمات السؤال فقط.
- **مثال:** عندما يحل الطالب مسألة رياضية، يأخذ بعين الاعتبار المعلومات المهمة والمعلومات ذات العلاقة بالمسألة. ما المرحلة المناسبة لهذا الإجراء؟
- أ) فهم المسألة
- ب) وضع الخطة
- ج) تنفيذ الخطة
- د) التحقق من الحل
- **طريقة التعامل:** حدد هل الإجراء يخص تفسير المعلومات أم اختيار طريقة أم تنفيذها أم مراجعتها.
- **الإجابة:** (أ) فهم المسألة
- **خطوات الحل:**

في مرحلة فهم المسألة تُحدَّد المعطيات والشروط والمطلوب، ويُميَّز المهم من الزائد.

استراتيجية التخمين والتحقّق

- التخمين والتحقق يبدأ باقتراح قيمة، ثم اختبارها في الشروط وتعديلها. ينفع عند قلة الاحتمالات أو إمكان تضييقها. إذا كانت المعطيات غير كافية فلا نختلق شرطًا إضافيًا للحصول على جواب وحيد.
- **مثال:** إذا كان عدد الخراف والطيور 64، فكم خروفاً وكم طائراً؟ الاستراتيجية المستخدمة لحل هذه المسألة هي

- أ) الرسم
- ب) التخمين والتحقق
- ج) النمط
- د) الاستنتاج الرياضي
- **طريقة التعامل:** اقترح توزيعًا واختبره بالشروط المعطاة، وانتبه إلى أن المجموع وحده لا يحدد عددي النوعين تحديدًا وحيدًا.
- **الإجابة:** (ب) التخمين والتحقق
- **خطوات الحل:**

عند معرفة ناتج نهائي مكوّن من كميتين مجهولتين، نخمّن قيمًا ونتحقق من تحقّقها للشرط.

استراتيجية الحل عكسيًّا (الرجوع للخلف)

- الحل عكسيًا يبدأ بالنتيجة أو المعلومة الأخيرة، ويعود نحو المطلوب مع عكس العمليات بحسب العلاقات. يفيد في السلاسل التي نعرف نهايتها ونبحث عن بدايتها.
- **مثال:** إذا كان عمر سعيد أكبر من عمر محمد بخمس سنوات، ومحمد أكبر من فيصل بخمس عشرة سنة، وفيصل أكبر من أسامة بعشر سنوات، وكان عمر أسامة 15، فكم عمر سعيد؟ أفضل طريقة للحل
- أ) البحث عن نمط
- ب) الرسم
- ج) الحل العكسي
- د) التخمين والتحقق
- **طريقة التعامل:** ابدأ بالعمر المعلوم وتابع العلاقات رجوعًا إلى الشخص المطلوب، مع المحافظة على اتجاه «أكبر من».

- **الإجابة:** (ج) الحل العكسي
- **خطوات الحل:**

العمر المعلوم آخر السلسلة (أسامة) والمطلوب أولها (سعيد)، فنتراجع بعكس اتجاه العلاقات.

استراتيجية إنشاء قائمة منظّمة

- القائمة المنظمة تحصر الاحتمالات بترتيب ثابت يمنع التكرار والإغفال. نثبت عنصرًا ونتابع بقية الخيارات، ثم ننتقل إلى التالي، ونميز المجموعة عن ترتيب عناصرها.
- **مثال:** إذا اجتمع 8 لاعبين للتدريب على كرة التنس، كم فريقاً مكوّناً من 3 لاعبين يمكن تكوينه منهم؟ ما الاستراتيجية الأنسب لحل هذه المسألة؟
- أ) التبرير المنطقي
- ب) الحل عكسياً
- ج) قائمة منظّمة
- د) أشكال فن
- **طريقة التعامل:** نظم المجموعات الممكنة وفق قاعدة ثابتة، ولا تعد الفريق نفسه مرة أخرى بسبب تغيير ترتيب أسمائه.
- **الإجابة:** (ج) قائمة منظّمة
- **خطوات الحل:**

إنشاء قائمة منظّمة يضمن حصر كل الاحتمالات دون تكرار أو إغفال، وهي الأنسب لمسائل العدّ.

استراتيجية البحث عن نمط

- للبحث عن نمط نقارن الحدود والفروق أو النسب ونختبر القاعدة على المعطيات كلها. لا تكفي علاقة توافق أول حدين، وقد تتعدد القواعد الممكنة إذا لم يحدد السياق المقصود.
- **مثال:** الطريقة الأنسب لإيجاد الحد التالي في

$$8, 12, 15, 17, \ldots$$

- أ) البحث عن نمط
- ب) الرسم
- ج) الحل العكسي
- د) التخمين والتحقق
- **طريقة التعامل:** قارن الفروق المتتالية وابحث عن انتظام يفسر جميع الانتقالات المعطاة.
- **الإجابة:** (أ) البحث عن نمط
- **خطوات الحل:**

الفروق بين الحدود $4, 3, 2$ متناقصة بانتظام، فنستكشف النمط لإيجاد الحد التالي.

استراتيجية الرسم والتمثيل وإنشاء النموذج

- الرسم والتمثيل يساعدان على تجسيد العلاقات وتتبع الحركة أو المواقع. نكتب البيانات على التمثيل ثم نتابع الخطوات، ولا نفترض أن الرسم مطابق للمقياس ما لم يذكر ذلك.
- **مثال:** طالب يركض حول الملعب 18 خطوة للأمام و8 خطوات للخلف، وكان طول المضمار 80 متراً. ما أفضل استراتيجية لمعرفة متى يبلغ الطالب نهاية المضمار؟
- أ) البحث عن نمط
- ب) الحل العكسي

- ج) تمثيل المسألة
- د) التبرير المنطقي
- **طريقة التعامل:** مثل التقدم والرجوع على خط، وتابع موضع بلوغ النهاية أثناء الحركة لا بعد اكتمال دورة فقط.
- **الإجابة:** (ج) تمثيل المسألة
- **خطوات الحل:**

تمثيل المسألة برسم خط الحركة يوضّح التقدّم الصافي في كل دورة ويسهّل تتبّع الموقع.

المعيار العاشر: التواصل الرياضي

تعريف التواصل الرياضي

- التواصل الرياضي التعبير عن الأفكار وفهمها وتبادلها باللغة والرموز والرسوم، مع تفسير الأسباب. لا يقتصر على ذكر الجواب؛ شرح الطالب بلغته يوضح فهمه للمعنى.
- **مثال:** قدرة الطالب على شرح مفهوم بأسلوبه الخاص يُعتبر من أساليب
- أ) الاستنتاج الرياضي
- ب) الترابط الرياضي
- ج) التواصل الرياضي
- د) التمثيل الرياضي
- **طريقة التعامل:** حدد ما يفعله الطالب: هل يشرح فكرة أم ينفذ حسابًا فقط؟
- **الإجابة:** (ج) التواصل الرياضي
- **خطوات الحل:**

التواصل الرياضي قدرة الطالب على التعبير عن الأفكار الرياضية بلغته، قراءةً وكتابةً وتحدثًا واستماعًا.

مهارات التواصل الرياضي

- يشمل التواصل القراءة والكتابة والتحدث والاستماع. نميز المهارة من دور الطالب في النشاط، فقد يقرأ المعلم بينما يستمع الطالب، وقد يتحدث الطالب لشرح تبريره.
- **مثال:** عندما يقوم معلم الرياضيات بقراءة قصة للطلاب تتضمن مفهوماً رياضياً، فأي أنواع التواصل الرياضي يريد تنميته لدى الطلاب؟
- أ) القراءة
- ب) التمثيل
- ج) التحدث
- د) الاستماع
- **طريقة التعامل:** ركز على نشاط الطلاب أثناء قراءة المعلم، لا على الفعل الذي يؤديه المعلم نفسه.
- **الإجابة:** (د) الاستماع
- **خطوات الحل:**

المعلم هو من قرأ والطالب دوره الاستماع؛ لو قرأ الطالب بنفسه لكانت المهارة القراءة لا الاستماع.

التمثيل الرياضي وصوره

- التمثيل يعرض الفكرة بصور لفظية أو رمزية أو عددية أو بيانية أو محسوسة. الربط بين الصور المتكافئة يوضح المعنى، بينما التواصل يشمل شرح هذا الربط وتبريره.
- تُصنَّف التمثيلات أيضًا إلى داخلية (الصور الذهنية التي يبنيها الطالب نفسه للفكرة) وخارجية (ما يُقدَّم له من رموز وصيغ وصور ورسوم)؛ والتدريس الفعّال يربط بين الاثنين.

- **مثال:** معلم شرح للطلاب بهذا الشكل: دائرة مملوءة بالماء إلى نصفها، مع كتابة

$$\frac{1}{2} = 0.50 = 50\%$$

- أ) تواصل
- ب) ترابط
- ج) تمثيل
- د) استنتاج
- **طريقة التعامل:** لاحظ الصور المختلفة للكمية نفسها، وحدد الغرض من الانتقال بينها.
- **الإجابة:** (ج) تمثيل
- **خطوات الحل:**

عرض المفهوم نفسه بصور متعددة (بصرية ورمزية) هو التمثيل الرياضي.

معيار جودة سؤال التواصل

- السؤال الذي ينمي التواصل يطلب شرحًا أو تبريرًا أو مقارنة طرق أو تفسير تمثيل. السؤال الذي يكتفي بنتيجة حسابية يتيح تعبيرًا أقل، ولو احتوى أعدادًا كثيرة.
- **مثال:** أي الأسئلة التالية أقلّ تنمية لمهارة التواصل الرياضي لدى الطالب؟
- أ) صف طريقتين لإيجاد محيط المستطيل
- ب) استعمل المسطرة لرسم مستطيلين مختلفين لهما المحيط نفسه
- ج) اكتب مسألة من واقع الحياة يمكن حلها بإيجاد المحيط، ثم حلّها
- د) اذكر أمثلة من واقع الحياة تحتاج منها إلى تقدير محيط الأشكال
- **طريقة التعامل:** قارن ما يطلبه كل خيار من الطالب، وابحث عن الأقل حاجة إلى تفسير أو تعبير.

- **الإجابة:** (ب) استعمل المسطرة لرسم مستطيلين مختلفين لهما المحيط نفسه
- **خطوات الحل:**

التواصل يتطلّب تعبيرًا لغويًا (قراءة وكتابة وتحدثًا واستماعًا)؛ المهمة الأدائية المجردة لا تحقق ذلك.

جودة أسئلة التواصل الرياضي

- سؤال التواصل الجيد يطلب من الطالب الوصف أو الشرح أو المقارنة بلغته الخاصة، لا مجرد إجراء حسابي يُجاب برقم. ميّز بين صياغة تطلب تفسيرًا لفظيًا وصياغة تطلب ناتجًا عدديًا فقط، فالثانية لا تُنمّي مهارة التواصل.
- **مثال:** ضمن موضوع الاحتمالات والإحصاء، أي التعبيرات الآتية أقلّ تنمية لمهارة التواصل الرياضي؟
- أ) صف موقفاً في حياتك يتضمن حوادث مستقلة وأخرى غير مستقلة
- ب) اشرح لماذا يُستخدم الطرح عند حساب احتمال حادثتين غير متنامتين
- ج) بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة كتب من بين عشرة كتب موجودة على الرف؟
- د) تحدّث عن أوجه الشبه والاختلاف بين الانحراف المعياري والانحراف المتوسط
- **طريقة التعامل:** ابحث عن الخيار الذي جوابه رقم محسوب مباشرة، لا وصفًا أو شرحًا أو مقارنة لفظية.
- **الإجابة:** (ج) بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة كتب من بين عشرة كتب موجودة على الرف؟
- **خطوات الحل:**

1. الخيارات (أ)، (ب)، (د) تطلب وصفًا أو شرحًا أو مقارنة لفظية.
2. أما (ج) فسؤال حسابي جوابه عدد، فلا يُنمّي التواصل.

المعيار الحادي عشر: النمذجة والترابط

الترابط الرياضي

- الترابط الرياضي ربط الأفكار ببعضها واستعمالها في سياقات مختلفة. الترابط الداخلي بين موضوعات الرياضيات، والخارجي بينها وبين العلوم والحياة. لا نكتفي بتشابه الرموز؛ نحدد العلاقة التي تنتقل بين السياقات.
- **مثال:** قدرة الطالب على استخدام مفاهيم الرياضيات في سياقات مختلفة
- أ) الترابط الرياضي
- ب) التواصل الرياضي
- ج) التمثيل الرياضي
- د) الاستنتاج الرياضي
- **طريقة التعامل:** حدد هل الوصف يتعلق بعرض الفكرة أم باستخدامها وربطها في سياقات أخرى.
- **الإجابة:** (أ) الترابط الرياضي
- **خطوات الحل:**

نقل المفهوم الرياضي إلى سياقات ومجالات مختلفة هو جوهر الترابط الرياضي.

الترابط الخارجي مع العلوم والحياة

- تظهر الروابط الخارجية حين نستعمل القوانين الرياضية لفهم ظاهرة في علم آخر أو موقف حياتي. نوضح الكمية والعلاقة ووحداتها، ثم نربط النتيجة بمعناها في السياق.
- **مثال:** عندما يستخدم الطالب القوانين والقواعد الرياضية في تطبيقات داخل العلوم الأخرى، فإن هذا يسمى:
- أ) التذوق الرياضي
- ب) التواصل
- ج) الترابط
- د) التمثيل
- **طريقة التعامل:** لاحظ انتقال القانون من الرياضيات إلى علم آخر، ثم صنف نوع الربط المطلوب.
- **الإجابة:** (ج) الترابط
- **خطوات الحل:**

الترابط الرياضي ربط الرياضيات بالعلوم الأخرى وتوظيف قوانينها وقواعدها في تطبيقات خارجها.

النمذجة الرياضية

- النمذجة تحول موقفًا واقعيًا إلى وصف رياضي: نحدد المتغيرات والافتراضات، ونبني العلاقة، ثم نفسر الناتج ونتحقق من ملاءمته للموقف. قد تجمع مفاهيم ومهارات وعمليات متعددة.
- **مثال:** يمكن القول أن النمذجة الرياضية هي
- أ) مشكلة رياضية
- ب) تطبيقات رياضية

- ج) مسألة رياضية حياتية
- د) مفاهيم وعمليات ومهارات رياضية
- **طريقة التعامل:** قارن الخيارات بما تتطلبه عملية بناء نموذج، ولا تختزلها في إجراء حسابي واحد.
- **الإجابة:** (د) مفاهيم وعمليات ومهارات رياضية
- **خطوات الحل:**

النمذجة الرياضية توظيف المفاهيم والعمليات والمهارات الرياضية معًا لتمثيل موقف حياتي.

المعيار الثاني عشر: الاستدلال والبرهان

الاستقراء والاستنتاج

- الاستقراء ينتقل من حالات وأمثلة إلى تخمين عام، والاستنتاج ينتقل من قاعدة إلى نتيجة تلزم عنها. تكرار الأمثلة يدعم التخمين لكنه لا يثبت حكمًا عامًا على جميع الحالات.
- **مثال:** يحرص المعلم خالد على تقديم أمثلة عديدة على القاعدة الرياضية قبل صياغتها بالتعاون مع تلاميذه، لأن ذلك ينمي لديهم مهارة
- أ) التحليل
- ب) البرهان
- ج) الاستقراء
- د) الاستنتاج
- **طريقة التعامل:** تتبع اتجاه النشاط من الأمثلة إلى صياغة القاعدة، ثم حدد نوع التفكير.
- **الإجابة:** (ج) الاستقراء
- **خطوات الحل:**

الاستقراء تتبّع الأمثلة للوصول إلى القاعدة العامة.

أساليب البرهان الرياضي

- نختار البرهان بحسب العلاقة المراد إثباتها. المباشر يبدأ بالفرض، والمكافئ العكسي يبدأ بنفي النتيجة لإثبات نفي الفرض، والتناقض يفترض خلاف المطلوب ليستنتج استحالة.
- **مثال:** لإثبات $3x+1=4$ حيث $x=1$، نفرض أن $3x+1\neq 4$ ونثبت أن $x\neq 1$. ما هو البرهان المستخدم؟
- أ) تناقض
- ب) مباشر
- ج) عكس المباشر
- د) المثال المضاد
- **طريقة التعامل:** حدد ما نُفي وما تبدل ترتيبه، ثم قارن الإجراء بتعريف أساليب البرهان.
- **الإجابة:** (ج) عكس المباشر
- **خطوات الحل:**

عكس المباشر (المكافئ العكسي) يثبت $\sim q\rightarrow\sim p$ بدلاً من إثبات $p\rightarrow q$ مباشرة.

الاستدلال ليس من طرق البرهان

- الاستدلال الرياضي مفهوم عام (الأسلوب الكلي في التفكير والوصول إلى نتيجة من مقدمات)، وليس طريقة برهان محددة بذاتها. طرق البرهان المحددة هي: المباشر، وعكس المباشر، والتناقض، والمثال المضاد، والاستقراء الرياضي، وهذه فقط تُعدّ "طرق برهان"، أما "الاستدلال" فخيار خادع يظهر غالبًا بين بدائل طريقة برهان محددة.
- **مثال:** أي مما يلي لا يُعدّ من طرق البرهان الرياضي؟
- أ) الاستدلال الرياضي

- ب) الاستقراء الرياضي
- ج) المثال المضاد
- د) نقض الفرض
- **طريقة التعامل:** استبعد الخيارات التي هي أسماء طرق برهان محددة، وابحث عن الخيار الذي يصف مفهومًا عامًا شاملًا لا طريقة بعينها.
- **الإجابة:** (أ) الاستدلال الرياضي
- **خطوات الحل:**

الاستدلال الرياضي أسلوب عام في التفكير يشمل طرق البرهان، وليس طريقة برهان محدّدة بذاته.

المثال المضادّ

- المثال المضاد حالة تحقق شروط العبارة العامة وتخالف نتيجتها. يكفي مثال مضاد واحد لإبطالها، بينما أمثلة مؤيدة كثيرة لا تثبت عمومها.
- **مثال:** لإثبات عدم صحة العبارة $xy > x + y$ نستخدم
- أ) البرهان المباشر
- ب) البرهان غير المباشر
- ج) المثال المضاد
- د) البرهان العكسي
- **طريقة التعامل:** ابحث عن قيم مسموحة لا تحقق المتباينة، بدل محاولة إثباتها لكل القيم.
- **الإجابة:** (ج) المثال المضاد
- **خطوات الحل:**

لإثبات عدم صحة عبارة عامة يكفي مثال واحد يخالفها، مثل $x = 1, y = 1$ حيث $1 > 2$ غير صحيحة.

الاستقراء الرياضي

- الاستقراء الرياضي يبدأ بإثبات الحالة الأولى. ثم نفترض صحة العبارة عند عدد طبيعي عام ونثبت انتقالها إلى العدد التالي. الافتراض في خطوة الانتقال يختلف عن إثبات الحالة الأولى.
- **مثال:** عندما نريد استخدام "الاستقراء الرياضي" في إثبات صحة العبارة $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ فإننا نقوم بما يلي
- أ) نعطي عدداً من الأمثلة المتنوعة التي تؤكد صحة العبارة
- ب) نبدأ من الطرف الأيسر ونستخدم القوانين الرياضية لإثبات مساواته للطرف الأيمن
- ج) نفرض صحة العبارة عندما $n = 1$، $n = k$، ونثبت صحتها عندما $n = k + 1$
- د) نثبت صحة العبارة عندما $n = 1$، وأن صحتها عندما $n = k$ يؤدي لصحتها عندما $n = k + 1$
- **طريقة التعامل:** ميز بين إثبات البداية وفرض الاستقراء، ثم افحص كيف تستعمل الفرض لإثبات الحالة التالية.
- **الإجابة:** (د) نثبت صحة العبارة عندما $n = 1$، وأن صحتها عندما $n = k$ يؤدي لصحتها عندما $n = k + 1$
- **خطوات الحل:**

نثبت صحة العبارة عند $n = 1$ (الأساس)، ثم نفرض صحتها عند $n = k$ ونثبت أنها تؤدي لصحتها عند $n = k + 1$ (الاستقراء).

الاستنتاج مقابل الاستقراء في التدريس

- إذا بدأ المعلم بالقاعدة العامة ثم انتقل إلى تطبيقها على أمثلة وحالات جزئية، فهذا أسلوب الاستنتاج (الاستنباط). أما إذا بدأ بأمثلة جزئية متعددة ليصل منها إلى قاعدة عامة، فهذا أسلوب الاستقراء، وهما اتجاهان متعاكسان تمامًا في التدريس.
- **مثال:** عندما ينطلق المعلم من "القاعدة العامة" ثم ينتقل إلى "الأمثلة"، يسمى هذا الأسلوب
- أ) الاستقراء
- ب) الاستنتاج / الاستنباط
- ج) الإبداع
- د) المنطق
- **طريقة التعامل:** حدد اتجاه الانتقال في السؤال: من العام إلى الخاص، أم من الخاص إلى العام؟
- **الإجابة:** (ب) الاستنتاج / الاستنباط
- **خطوات الحل:**

1. الانتقال من القاعدة العامة إلى الأمثلة هو أسلوب الاستنتاج (الاستنباط)، عكس الاستقراء.

خاتمة الكتاب

يختتم هذا الكتاب رحلته عبر معايير الرياضيات الاثني عشر، وقد جمع المفاهيم والقوانين والخصائص وأساليب التفكير والتعليم في مرجع عربي موجز للمراجعة. وما يمنح هذه المادة قيمتها هو أن تقود القارئ إلى فهم العلاقات بين الأفكار، وإدراك شروط استعمالها، وتفسير ما ينتج عنها.

فمعرفة القانون خطوة في التعلّم، ويكتمل أثرها حين يستطيع المتعلم أن يبيّن متى يستخدمه ولماذا، وأن يختار تمثيلًا مناسبًا للمسألة، ويتحقق من معقولية الحل. وبالمثل، تتصل المعرفة الرياضية بعمل المعلم حين يحسن عرض المفهوم، ويتتبع تفكير طلابه، ويوظف الخطأ مدخلًا للفهم.

وللقارئ أن يجعل «الوجيز» رفيقًا للمراجعة يعود إليه عند الحاجة، ويصل قراءته بالتطبيق والتدريب في موقع المشروع. وكل سؤال يكشف موضعًا يحتاج إلى إعادة نظر هو فرصة لبناء فهم أوضح، وكل تفسير يقدّمه القارئ لحلّه هو خطوة نحو معرفة أكثر رسوخًا.

ويبقى هذا العمل مساهمة قابلة للتصحيح والتطوير، ورجاءً في أن ينفع معلمي الرياضيات وطلابها، ويضيف إلى المكتبة العربية مادة واضحة يسهل الرجوع إليها. وغاية المراجعة أن تتحول المعرفة إلى فهم حاضر، وتفكير منظم، وممارسة تعليمية واعية.